Optimização e Algoritmos
1ºSemestre – 2003/2004
LEEC

Série de Problemas nº2

1. Para cada valor do escalar β determine o conjunto de todos os pontos de estacionaridade da seguinte função de duas variáveis:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y$$

   Quais desses pontos de estacionaridade são minimos globais?

2. Para cada um dos seguintes problemas justifique detalhadamente a sua resposta usando as condições de optimalidade:

(a) Mostre que a função $f(x,y) = (x^2 - 4)^2 + y^2$ tem dois mínimos globais e um ponto de estacionaridade que não é nem um mínimo local nem um máximo local.

(b) Determine todos os mínimos locais da função $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\cos y$

(c) Determine todos os mínimos e máximos locais da função

$f(x,y) = senx + seny + sen(x+y)$ no conjunto $\{(x,y) : 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi\}$

(d) Mostre que a função $f(x,y) = (y - x^2)^2 - x^2$ tem só um ponto de estacionaridade, que não é nem um mínimo local nem um máximo local.

(e) Considere a minimização da função de (d) sujeita a não restrições em x e à restrição $-1 \leq y \leq 1$ em y. Mostre que existe pelo menos um mínimo global e determine todos os mínimos globais.

3. Seja $f : R^n \to R$ uma função diferenciável. Suponha que um ponto x^* é um mínimo local de f ao longo de todas as linhas que passam por x^*; isto é, a função:

$$g(\alpha) = f(x^* + \alpha d) \text{ é minimizada em } \alpha = 0 \text{ para todo o } d \quad R^n$$

(a) Mostre que $f(x^*) = 0$

(b) Mostre através de exemplo que x^* não necessita de ser um mínimo local de f.
Sugestão: Considere a função de duas variáveis $f(y,z) = (z - py^2)(z - qy^2)$, onde $0 < p < q$. Mostre que (0,0) é um mínimo local de f ao longo de todas as linhas que passam em (0,0). Além disso, se $p < m < q$, então $f(y, my^2) < 0$ se $y \neq 0$ e $f(0,0) = 0$.

4. Usando as condições de optimalidade mostre que para todo o $x > 0$ temos:

$$\frac{1}{x} + x \geq 2.$$

5. Determine o paralelipípedo de volume unitário que tem uma superfície de área mínima.

   Sugestão: Por eliminação de uma das variáveis, mostre que o problema é equivalente à minimização em $x > 0$ e $y > 0$ de:

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$