Optimização e Algoritmos

1ºSemestre – 2003/2004

LEEC

Série de Problemas nº 5

1. Suponha que se pretende construir uma auto-estrada num terreno acidentado. O custo da construção é proporcional à quantidade de terra que tem de ser adicionada ou retirada no processo de terraplanagem. Seja T a distância, em linha recta, entre os pontos a ligar pela auto-estrada e seja $c(t)$ o perfil do terreno para $t \in [0, T]$. Pretende-se determinar o perfil $y(t)$ da auto-estrada.
   Por forma a evitar declives excessivos, impõe-se que o declive máximo não possa exceder o valor b_1, isto é $\left|\dot{y}(t)\right| \le b_1$. Por outro lado, para tornar mais suave a condução impõe-se também que a taxa de variação do declive não possa exceder b_2, isto é $\left|\ddot{y}(t)\right| \le b_2$. Tem ainda de satisfazer-se as condições inicial e final $y(0) = a$ e $y(T) = b$.

   (a) Formule este problema como um problema de optimização.

   (b) Faça $y_1 = y$ e $y_2 = \dot{y}$ e considere a auto-estrada dividida em k intervalos que por simplicidade podem ser considerados unitários. Faça $c(k) = c_k$, $y_1(k) = y_{1,k}$ e $y_2(k) = y_{2,k}$. Formule o problema como um problema de programação não-linear.

2. Considere o seguinte problema:

   Minimize $f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$

   A solução óptima deste problema é $x^* = [2,1]'$ e $f(x^*) = 0$.

   Use o Algoritmo de Newton para aproximar esta solução utilizando como estimativa inicial o ponto $x^0 = [0,3]'$.

3. Use o Algoritmo de Davidon-Fletcher-Powell para resolver o mesmo problema e usando a mesma estimativa inicial $x^0 = [0,3]'$ e $D_1 = I$.

4. Considere o seguinte problema:

Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

sujeito a: $x_1 + x_2 - 2 = 0$

(a) Determine a solução óptima deste problema e verifique a sua optimalidade usando as condições de Kuhn-Tucker.

(b) Uma abordagem possível para a solução deste problema consiste em transformá-lo num problema da forma:

Minimize $x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 - 2)^2$ onde $\mu > 0$ é um escalar com valor elevado. Resolva este problema de optimização sem restrições para $\mu = 10$ usando o método do gradiente conjugado.

5. Use o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para resolver os seguintes problemas:

(a) $\min f(x) = \|x\|^2, \quad h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1$

(b) $\min f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad h(x) = \|x\|^2 - 1$

6. Considere todos os paralelipípedos com uma dada diagonal, d, dada por $d^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, onde x_1, x_2 e x_3 são os comprimentos das arestas.
Determine um que tenha área máxima (soma das áreas das faces rectangulares) e um que tenha perímetro máximo (soma dos comprimentos das arestas).

7. Considere o problema com restrições lineares:

$$\min f(x)$$
$$\text{sujeito a } Ax = b$$

onde A é uma matriz (mxn) com característica $k \le m \le n$ e b é um vector $mx1$.
Assuma que $k < m$ e que o problema é factível.
Mostre que a hipótese de regularidade não é necessária para que as condições do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange se verifiquem, excepto que o vector dos multiplicadores de Lagrange pode não ser único.

Sugestão: Despreze as restrições de igualdade que são redundantes e atribua o valor zero aos multiplicadores de Lagrange que lhe estão associados.