MÉTODOS DE PROCURA EM LINHA

(sem recurso a derivadas)

Introdução

Seja o problema de minimizar $f(\alpha)$ com $a \le \alpha \le b$ em que a localização exacta do mínimo em $[a,b]$ não é conhecida. Este intervalo é conhecido por intervalo de incerteza.

Se durante o processo de procura for possível excluir partes do intervalo que não contêm o mínimo reduzimos o intervalo de incerteza.

<u>Teorema :</u> Seja $f: \quad \rightarrow$ estritamente quase convexa no intervalo $[a,b]$ sejam $\lambda, \mu \quad [a,b]$ tais que $\lambda < \mu$.

Se $f(\lambda) > f(\mu) \quad f(z) \ge f(\mu) \quad z \quad [a,\lambda)$

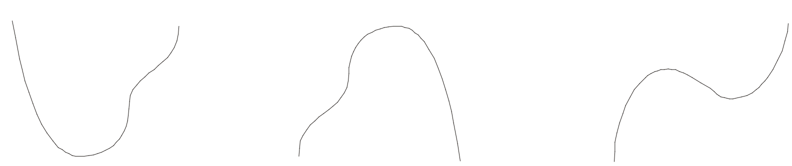
Se $f(\lambda) \le f(\mu) \quad f(z) \ge f(\lambda) \quad z \quad [\mu,b)$

(ver Figura 1)

<u>Definição de função quase - convexa</u>

Seja $f: \Omega \rightarrow$ em que Ω é não vazio e convexo em ^{n} . f diz-se quase convexa se para cada x_1 e $x_2 \quad \Omega$ a seguinte desigualdade é verdadeira :

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \le \max\{f(x_1), f(x_2)\} \text{ para } x \quad (0,1)$$



quase convexa — quase concava — não é quase convexa nem quase concava

NOTA : Os conjuntos de nível definem conjuntos convexos

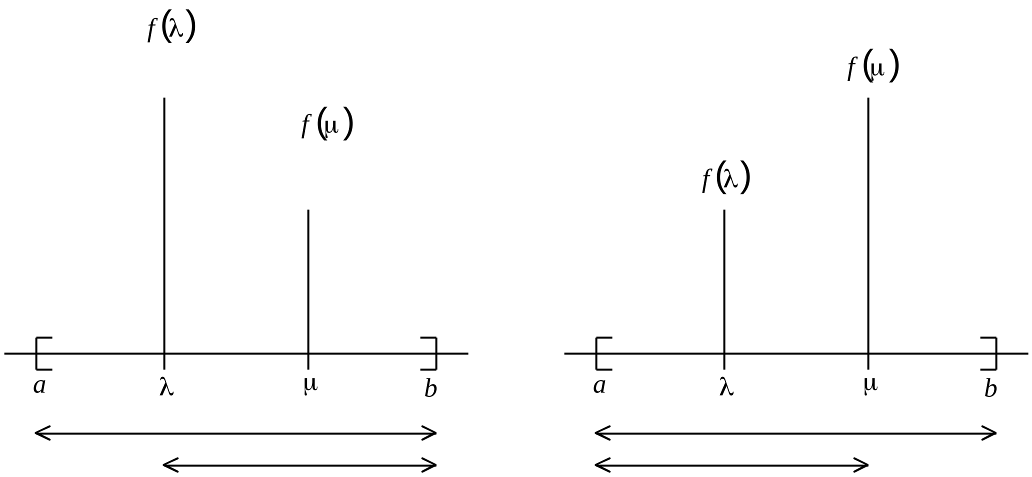
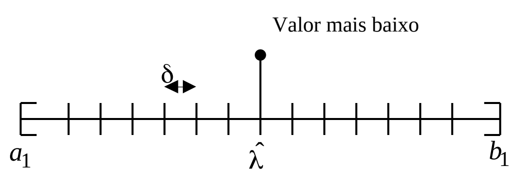


Figura 1

Existem vários procedimentos para minimizar uma função quase convexa num intervalo fechado e limitado, por redução iterativa do intervalo de incerteza :

Procura uniforme

Divide-se o intervalo de incerteza em n sub-intervalos de amplitude δ



$$b_1 = a_1 + (n+1)\delta$$

Depois de calcular o valor da função em todos os pontos da grelha se $f\left(\hat{\lambda}\right)$ for o valor mais baixo da função então o mínimo de f estará no intervalo $\left[\hat{\lambda} - \delta, \hat{\lambda} + \delta\right]$.

Para obter um intervalo de incerteza final pequeno temos de calcular f muitas vezes .

Procura dicotómica

Seja $f : \quad \rightarrow$

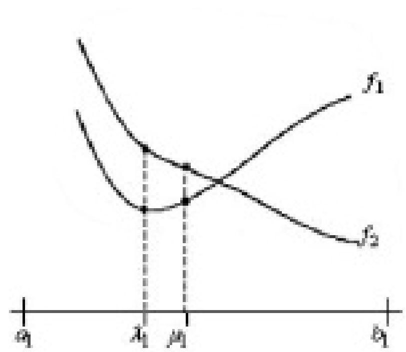


Figura 2

Para a função f_1 temos $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$

e o novo intervalo será $[a_1, \mu_1]$

Para a função f_2 temos $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$

e o novo intervalo será $[\lambda_1, b_1]$

<u>Então a dimensão do intervalo depende da função .</u>

Antecipadamente não sabemos se $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$ ou $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$.

A estratégia então deve ser no sentido de evitar o pior caso.

Uma possibilidade seria colocar λ_1 e μ_1 no meio do intervalo mas assim só teríamos uma observação (avaliação) da função.

Então a melhor estratégia consiste em colocar λ_1 e μ_1 simetricamente para um e outro lado do ponto médio (ver Figura 3).

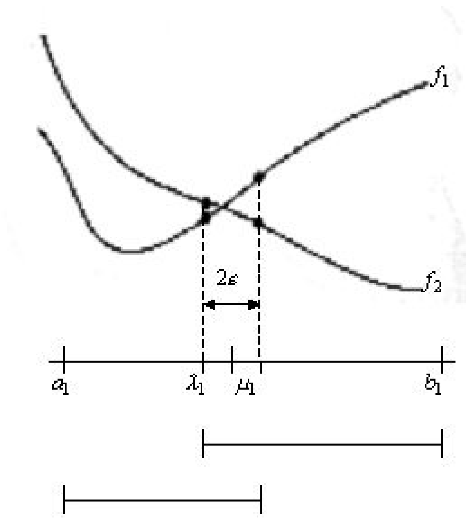


Figura 3

ALGORITMO DA PROCURA DICOTÓMICA:

<u>Passo inicial</u> : escolha $2\varepsilon > 0$

Seja l a dimensão final do intervalo de incerteza.

Seja $[a_1, b_1]$ o intervalo inicial de incerteza.

Faça $k = 1$ e vá para o passo principal.

<u>Passo principal</u> :

1. Se $b_k - a_k < l$ **PARE** . O mínimo está no intervalo $[a_k, b_k]$

Caso contrário , considere λ_k e μ_k como definidos a seguir :

$$\lambda_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon \qquad \mu_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon$$

E VÁ PARA 2

2. Se $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$ faça $a_{k+1} = a_k$

$b_{k+1} = \mu_k$

Caso contrário faça $a_{k+1} = \lambda_k$

$b_{k+1} = b_k$

Substitua k por $k+1$ e volte ao passo 1

NOTA: Verifique que a largura do intervalo de incerteza no início da iteração $k+1$ é dada por :

$$\left(b_{k+1} - a_{k+1}\right) = \frac{1}{2^k}\left(b_1 - a_1\right) + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

Esta fórmula permite determinar o nº de iterações necessárias para atingir uma certa precisão.

Método da Golden Section

Seja $[a_k, b_k]$ o intervalo de incerteza na iteração k do método de Golden Section.

Pelo teorema T1 o novo intervalo de incerteza será $[\lambda_k, b_k]$ se $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ e $[a_k, \mu_k]$ se $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$

Vamos escolher λ_k e μ_k de modo que :

1. O comprimento do novo intervalo $b_{k+1} - a_{k+1}$ não dependa do resultado da iteração k ou seja de $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ ou $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$

   Então teremos de ter

   $$b_k - \lambda_k = \mu_k - a_k$$

   Então se λ_k for da forma :

   $$\lambda_k = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k) \qquad \alpha \quad (0,1)$$

   μ_k tem de ser da forma

   $$\mu_k = a_k + \alpha(b_k - a_k)$$

   de modo que

   $$b_{k+1} - a_{k+1} = \alpha(b_k - a_k)$$

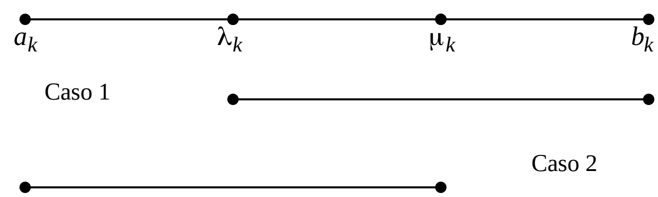
2. Quando λ_{k+1} e μ_{k+1} são seleccionados para a próxima iteração, se tenha :

   ou λ_{k+1} a coincidir com μ_k

   ou μ_{k+1} a coincidir com λ_k

   Se isto for possível significa que na iteração $k+1$ só teremos de fazer uma observação.

<u>Para ilustrar seja o exemplo :</u>



<u>Caso 1:</u> $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ neste caso $a_{k+1} = \lambda_k$

$b_{k+1} = b_k$

Para que $\lambda_{k+1} = \mu_k$ e aplicando $\boxed{\lambda_k = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k)}$ com k substituído por $k+1$ temos:

$$\mu_k = \lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1}) = \lambda_k + (1-\alpha)(b_k - \lambda_k)$$

ou seja $\mu_k = \lambda_k + (1-\alpha)(b_k - \lambda_k)$

substituindo agora λ_k e μ_k por $\begin{cases} \lambda_k = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k) \\ \mu_k = a_k + \alpha(b_k - a_k) \end{cases}$

obtém-se

$$a_k + \alpha(b_k - a_k) = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k) + (1-\alpha)\left[b_k - a_k - (1-\alpha)(b_k - a_k)\right]$$

cancelando os termos comuns nos dois membros

$$\alpha(b_k - a_k) = (1-\alpha)(b_k - a_k) + (1-\alpha)\left[b_k - a_k - (1-\alpha)(b_k - a_k)\right] =$$

$$= (1-\alpha)(b_k - a_k) + (1-\alpha)\left[(b_k - a_k)\alpha\right]$$

voltando a cancelar termos comuns resulta:

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

<u>Caso 2:</u> $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ neste caso

$$a_{k+1} = a_k$$
$$b_{k+1} = \mu_k$$

Para que $\mu_{k+1} = \lambda_k$ e seguindo raciocínio idêntico teremos:

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

Cuja solução positiva é $\alpha = 0,618$

Então se as escolhas forem feitas do modo descrito teremos, em cada iteração, uma redução do intervalo de incerteza de 0,618.

ALGORITMO DE "GOLDEN SECTION"

<u>Passo inicial</u>: Escolha $l > 0$. Seja $[a_1, b_1]$ o intervalo de incerteza inicial.

Seja $\lambda_1 = a_1 + (1-\alpha)(b_1 - a_1)$ e $\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$

com $\alpha = 0,618$

Calcule $f(\lambda_1)$ e $f(\mu_1)$, faça $k = 1$ e vá para o passo seguinte:

<u>Passo principal</u>:

1. Se $b_k - a_k < l$ **PARE** . A solução óptima está no intervalo $[a_k, b_k]$

   Caso contrário

   Se $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ vá para 2.

   Se $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ vá para 3.

2. Seja $a_{k+1} = \lambda_k$ e $b_{k+1} = b_k$.

Faça $\lambda_{k+1} = \mu_k$ e $\mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$

Calcule $f(\mu_{k+1})$ e vá para 4.

3. Seja $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = \mu_k$.

Faça $\mu_{k+1} = \lambda_k$ e $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$

Calcule $f(\lambda_{k+1})$ e vá para 4.

4. Substitua k por $k+1$ e vá para 1