Método de Fibonacci

Como no método da “Golden Section” o procedimento de procura de Fibonacci faz duas avaliações (observações) da função na primeira iteração e apenas uma avaliação em cada uma das iterações subsequentes.

O método difere da “Golden section” na medida em que a redução do intervalo de incerteza varia duma iteração para outra.

O procedimento é baseado na sequência de Fibonacci $\{F_n\}$ definida do seguinte modo:

$$F_{v+1} = F_v + F_{v-1} \qquad v = 1,2,\ldots$$
$$F_0 = F_1 = 1$$

A sequência é então dada por: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,…..

Suponha então que na iteração k o intervalo de incerteza é dado por $[a_k, b_k]$.
Considere agora os dois pontos de observação λ_k e μ_k dados pelas expressões seguintes, em que n é o número total de observações planeadas:

(*) $$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) \qquad k = 1,\ldots.,n-1$$

(€) $$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) \qquad k = 1,\ldots.,n-1$$

Pelo Teorema T1 enunciado sabemos que:

($) Se $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ o novo intervalo de incerteza é $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [\lambda_k, b_k]$

(&) Se $f(\lambda_k) \le f(\mu_k)$ o novo intervalo de incerteza é $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, \mu_k]$

No caso de se verificar ($) teremos:

$$\boldsymbol{b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - \lambda_k = b_k - a_k - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) = \left(1 - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\right)(b_k - a_k) =}$$
$$\boldsymbol{= \left(\frac{F_{n-k+1} - F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\right)(b_k - a_k) = \left(\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}\right)(b_k - a_k)}$$

No caso de se verificar (&) teremos:

(%) $$b_{k+1} - a_{k+1} = \mu_k - a_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right) - a_k = \left(\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}\right)\left(b_k - a_k\right)$$

Ou seja, em qualquer dos casos o intervalo de incerteza é reduzido de um factor:

$$\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$$

Mostraremos agora que na iteração k+1 teremos:

$$\lambda_{k+1} = \mu_k \quad \text{ou} \quad \mu_{k+1} = \lambda_k$$

ou seja que apenas é necessária uma observação fa função.

1. Seja $f\left(\lambda_k\right) > f\left(\mu_k\right)$. Então pelo Teorema teremos:

$$a_{k+1} = \lambda_k \quad \text{e} \quad b_{k+1} = b_k$$

Usando (*) com k substituido por k+1,

$$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\left(b_{k+1} - a_{k+1}\right) = \lambda_k + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\left(b_k - \lambda_k\right)$$

$$\lambda_{k+1} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right) + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\left[b_k - a_k - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right)\right]$$

$$\lambda_{k+1} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right) + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\left[1 - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\right]\left(b_k - a_k\right)$$

$$\lambda_{k+1} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right) + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\left[\frac{F_{n-k+1} - F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\right]\left(b_k - a_k\right)$$

$$\lambda_{k+1} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right) + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\left[\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}\right]\left(b_k - a_k\right)$$

$$\lambda_{k+1} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right) + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right)$$

$$\lambda_{k+1} = a_k + \frac{F_{n-k-1} + F_{n-k-2}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right)$$

$$\lambda_{k+1} = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right) = \mu_k \qquad \text{de (€)}$$

2. Se $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ por raciocínio idêntico pode verificar-se que:

$$\mu_{k+1} = \lambda_k$$

PORTANTO EM QUALQUER DOS CASOS É APENAS NECESSÁRIO FAZER UMA OBSERVAÇÃO DA FUNÇÃO NA ITERAÇÃO K+1

Resumindo: na primeira iteração são feitas duas observações da função, nas iterações subsequentes apenas uma.

Então:

1. No fim da iteração n-2 foram feitas n-1 observações;
2. Para k=n-1 segue-se de (*) e de (€) que:

$$\lambda_{n-1} = a_{n-1} + \frac{F_0}{F_2}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) = a_{n-1} + \frac{1}{2}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right)$$

$$\mu_{n-1} = a_{n-1} + \frac{F_1}{F_2}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) = a_{n-1} + \frac{1}{2}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right)$$

Uma vez que:

ou $\lambda_{n-1} = \mu_{n-2}$

ou $\mu_{n-1} = \lambda_{n-2}$

não existirá nenhuma observação nova nesta fase. No entanto, para obter mais redução no intervalo de incerteza, a última observação é colocada ligeiramente à direita ou à esquerda do ponto médio (constante de distinção - ε).

NOTA IMPORTANTE:

Ao contrário do que acontece com os métodos da procura dicotómica e de "Golden section", o método de Fibonacci requer que o número total, n, de observações seja escolhido ***apriori***. Isto porque os valores de λ_k e de μ_k dependem de n.

De (%) sabemos que:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \left(\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}\right)(b_k - a_k)$$

Para k=n-1

$$b_n - a_n = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)(b_{n-1} - a_{n-1}) = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)\left(\frac{F_2}{F_3}\right)(b_{n-2} - a_{n-2}) = \ldots.$$

$$b_n - a_n = \left(\frac{F_1}{F_n}\right)(b_1 - a_1) = \left(\frac{1}{F_n}\right)(b_1 - a_1)$$

Então no fim da iteração n-1 em que foram feitas n observações o intervalo de incerteza foi reduzido de $b_1 - a_1$ para $\frac{(b_1 - a_1)}{F_n}$.

Então n deve ser escolhido de modo que $\frac{(b_1 - a_1)}{F_n}$ reflicta a precisão desejada.

ALGORITMO DE FIBONACCI

Passo inicial: Escolha um intervalo final de incerteza de comprimento l>0 e uma constante de distinção ε >0.
Seja $[a_1, b_1]$ o intervalo inicial de incerteza, e escolha o número de observações n a fazer, de modo que $F_n > \frac{b_1 - a_1}{l}$.

Seja

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1)$$ e

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1)$$

calcule $f(\lambda_1)$ e $f(\mu_1)$, faça k=1 e vá para o passo principal.

Passo principal:

1. Se $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ vá para o passo 2.
   Se $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ vá para o passo 3.

2. Seja $a_{k+1} = \lambda_k$ **e** $b_{k+1} = b_k$.

   Faça $\lambda_{k+1} = \mu_k$ e $\mu_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1})$

   Se $k = n - 2$ vá para o passo 5;
   caso contrário avalie $f(\mu_{k+1})$ e vá para o passo 4.

3. Seja $a_{k+1} = a_k$ **e** $b_{k+1} = \mu_k$.

   Faça $\mu_{k+1} = \lambda_k$ e $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1})$

   Se $k = n - 2$ vá para o passo 5;
   caso contrário avalie $f(\lambda_{k+1})$ e vá para o passo 4.

4. Substitua k por k+1 e vá para o passo 1.

5. Seja $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ e $\mu_n = \lambda_{n-1} + \varepsilon$

Se $f(\lambda_n) > f(\mu_n)$ faça $a_n = \lambda_n$ **e** $b_n = b_{n-1}$.

Se $f(\lambda_n) \leq f(\mu_n)$ faça $a_n = a_{n-1}$ **e** $b_n = \lambda_n$.

PARE a solução está no intervalo $[a_n, b_n]$