1. Revisão Matemática

Notação

- Se x é um elemento do conjunto S: $x \in S$
- Especificação de um conjunto : $S = \{x \mid x \text{ satisfaz propriedade} P\}$
- União de dois conjuntos S e T: $S \cup T$
- Intersecção de dois conjuntos S e T: $S \cap T$
- $\exists$ existe ; $\forall$ para todo
- $f : A \to B$ significa que f é definida no conjunto A (seu domínio) e toma valores no conjunto B (seu contradomínio).

1. Revisão Matemática

Notação

- $x \in \Re^n$ é interpretado como um vector coluna
- x' designa o transposto de x e é um vector linha
- $x'y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ define o produto interno de $x, y \in \Re^n$.
- $x'y = 0$ significa que x e y são ortogonais
- Se $x \in \Re^n$ as notações $x > 0$ e $x \geq 0$ significam que todas as coordenadas x_i de x são positivas ou não negativas respectivamente
- Dados dois vectores x, y a notação $x > y$ significa que $x - y > 0$.
  ($x \geq y, x < y$, etc. , são interpretados do mesmo modo).

1. Revisão Matemática

Espaços Vectoriais

Um *espaço vectorial* X é definido por um conjunto de elementos chamados vectores e por duas operações :

- A primeira operação é a adição que associa com quaisquer dois vectores $x, y \in X$ um vector $x + y \in X$ (a soma de x e y).
- A segunda operação é a multiplicação por um escalar que associa a um vector $x \in X$ e a um escalar α um vector $\alpha x \in X$.

OBS: Associado a todos os espaços vectoriais existe um conjunto de escalares usados para definir a operação multiplicação por um escalar . Nas formulações mais abstractas exige-se apenas que os escalares sejam elementos de um campo algébrico.

1. Revisão Matemática

Espaços Vectoriais - Axiomas

O conjunto X e as operações de adição e multiplicação por um escalar satisfazem os seguintes axiomas :

1. $x+y = y+x$ (lei comutativa)
2. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (lei associativa)
3. Existe um vector nulo $\theta \in X$ tal que $x+\theta = x$ para $\forall x \in X$
4. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ (lei distributiva)
5. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ (lei distributiva)
6. $(\alpha \beta)x = \alpha(\beta x)$ (lei associativa)
7. $0x = \theta,\ 1x = x$

1. Revisão Matemática

Subespaços e Independência Linear

- Um subconjunto S de $\Re^n$ diz-se um *subespaço* de $\Re^n$ se $ax+by \in S$ para qualquer $x,y \in S$ e qualquer $a,b \in \Re$

- Um *linear manifold* em $\Re^n$ é um subespaço transladado, i.e. um conjunto da forma :

$$y+S=\left\{ y+x \mid x \in S \right\}$$

onde $y \in \Re$ e S é um subespaço de $\Re^n$

1. Revisão Matemática

Subespaços e Independência Linear

- O espaço gerado (*span*) por uma colecção finita $\{x_1 \ldots, x_m\}$ de elementos de $\Re^n$ é o subespaço consistindo de todos os vectores y da forma $y = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$ onde $a_k \in \Re$

- Os vectores $x_1 \ldots, x_m \in \Re^n$ dizem-se *linearmente independentes* se não existir um conjunto de escalares $a_1 \ldots, a_m$ tal que

$$\sum_{k=1}^{m} a_k x_k = 0 \text{ a menos que } a_k = 0 \text{ para cada } k$$

(Definição equivalente: $x_1 \neq 0$ e para qualquer k>1 o vector x_k não pertence ao *span* de $x_1 \ldots, x_{k-1}$)

1. Revisão Matemática

Subespaços e Independência Linear

- Dado um subespaço S de $\Re^n$ contendo pelo menos um vector não nulo então uma *base* para S define-se como uma colecção de vectores linearmente independentes cujo *span* é igual a S.

  (Qualquer base de um dado subespaço tem o mesmo número de vectores – este número é chamado a dimensão de S)

- Por convenção o subespaço $\{ 0 \}$ tem dimensão zero
- A *dimensão de um linear manifold* $y+S$ é a dimensão do correspondente subespaço S
- Qualquer subespaço de dimensão não nula tem uma *base ortogonal* .

1. Revisão Matemática

Matrizes

- Para qualquer matriz $A, A_{ij}, [A]_{ij}$ ou a_{ij} designa o seu elemento ij .

- A transposta de A é designada A' e:

  $(AB)' = B'A' \quad [A']_{ij} = a_{ji}$

  Se A é quadrada e $A' = A$ então A diz-se *simétrica*

- Se $[A]_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$ então A diz-se *diagonal.*

- Se $[A]_{ij} = 0$ sempre que $i < j$ então A diz-se *triangular* inferior.

- Se A uma matriz $m \times n$. O *espaço de chegada* (*ou contradomínio*) de A é o conjunto de todos os vectores $y \in \Re^m$ tal que y=Ax para $x \in \Re^n$

1. Revisão Matemática

Matrizes

- O *espaço nulo* ou *Kernel* de A é o conjunto de todos os vectores $x \in \Re^n$ tal que $Ax=0$.
- O espaço de chegada de A e o espaço nulo de A são subespaços.
- A *característica* de A é dada pelo mínimo das dimensões do espaço de chegada A e do espaço de chegada de A'.

  (A e A' têm obviamente a mesma característica).
- Diz-se que A tem característica completa (*full rank*) se a sua característica é igual a min { m,n }.

  Equivalente: A tem *full rank* sse ou as linhas A ou as colunas de A são linearmente independentes .

1. Revisão Matemática

Normas

DEFINIÇÃO 1.1: A norma $\| \bullet \|$ em $\Re^n$ é uma função que atribui um valor escalar $\| x \|$ a qualquer $x \in \Re^n$ e que tem as seguintes propriedades:

(a) $\| x \| \geq 0 \quad \forall x \in \Re^n$

(b) $\| cx \| = | c | . \| x \|$ para qualquer $c \in \Re$ e para qualquer $x \in \Re^n$

(c) $\| x \| = 0$ sse x=0

(d) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ para $\forall x, y \in \Re^n$

OBS: A *norma Euclideana* é definida por $\| x \| = \left(x' x \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

$\Re^n$ equipado com esta norma designa-se *Espaço Euclideano*

1. Revisão Matemática

Normas

PROPOSIÇÃO 1.1: (Teorema de Pitágoras) se x e y forem ortogonais então

$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

PROPOSIÇÃO 2.1: (Desigualdade de Schwartz) Para dois quaisquer vectores x e y temos

$$\left| x' + y \right| \leq \| x \| \bullet \| y \|$$

OUTRAS NORMAS:

- máxima norma $\| \bullet \|_\infty$ (também designada norma –sup ou norma $-\ell_\infty$ definida por

$$\| x \|_\infty = \max_i | x_i |$$

- norma $\ell_1 - \| \bullet \|_1$, definida por $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|$

1. Revisão Matemática

Normas de Matrizes

- A norma $\| \bullet \|$ no conjunto de matrizes $n \times n$ é uma função real que tem as mesmas propriedades que as normas de vectores quando a matriz é vista como um elemento de $\Re^{n^2}$.
- A norma de uma matriz $(n \times n)$ é representada por $\| A \|$
- Normas induzidas são construídas do seguinte modo : Dada uma qualquer norma de vector $\| \bullet \|$, a correspondente norma de matriz induzida é definida por :

$$\| A \| = \max_{\left\{ x \in \Re^n \middle| \| x \| = 1 \right\}} \| Ax \|$$

NOTA: pela desigualdade de Schwartz temos

$$\| A \| = \max \| Ax \| = \max \left| y' A x \right| \Rightarrow \| A \| = \| A' \|$$

1. Revisão Matemática

Matrizes Quadradas e Valores Próprios

DEFINIÇÃO 2.1: Uma matriz quadrada A diz-se *singular* se o seu determinante é nulo. Caso contrário diz-se não-sigular ou invertível.

PROPOSIÇÃO 3.1: (a) Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes :

(i) A matriz A é não - singular

(ii) A matriz A' é não - singular

(iii) Para qualquer $x \in \Re^n$ não nulo , temos $Ax \neq 0$

(iv) Para qualquer $y \in \Re^n$, existe um único $x \in \Re^n$ tal que $Ax = y$

(v) Existe uma matriz $n \times n$ B tal que $AB=I=BA$

(vi) As colunas de A são linearmente independentes

(vii) As linhas de A são linearmente independentes

(b) Se A é não – singular, a matriz B de (v) (inversa de A designada A^{-1}) é única.

(c) Para duas quaisquer matrizes quadradas invertíveis A e B da mesma dimensão ,temos :

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

1. Revisão Matemática

Matrizes Quadradas e Valores Próprios

DEFINIÇÃO 3.1: O *polinómio característico* ϕ de uma matriz $n\times n$ A é definido por $\phi(\lambda)=|\lambda I-A|$, onde I é a matriz identidade da mesma dimensão de A. As n raízes de ϕ (possivelmente repetidas e complexas) são chamadas os *valores próprios* de A. Um vector x (possivelmente com coordenadas complexas) tal que $Ax=\lambda x$, onde λ é um valor próprio de A, é chamado um *vector próprio* de A associado de λ.

PROPOSIÇÃO 4.1:

Seja A uma matriz quadrada.

(a) Um número complexo λ é um valor próprio de A sse existir um vector próprio não nulo associado a λ.

(b) A é singular sse tiver um valor próprio que é igual a zero.

1. Revisão Matemática

Matrizes Quadradas e Valores Próprios

PROPOSIÇÃO 5.1: Seja A uma matriz $n \times n$

(a) Os valores próprios de uma matriz triangular são iguais aos elementos da sua diagonal.

(b) Se S é uma matriz não – singular e $B = SAS^{-1}$, então os valores próprios de A e B coincidem.

(c) Os valores próprios de $cI+A$ são iguais a $c+\lambda_1,\ldots,c+\lambda_n$, onde $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ são os valores próprios de A.

(d) Os valores próprios de A^k são iguais a $\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k$ onde $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ são os valores próprios de A .

(e) Se A é não – singular, então os valores próprios A^{-1} são os inversos dos valores próprios de A.

(f) Os valores próprios de A e A' coincidem .

1. Revisão Matemática

Matrizes Quadradas e Valores Próprios

DEFINIÇÃO 4.1:

O *raio espectral* $p(A)$ de uma matriz quadrada A é definido como o máximo das amplitudes dos valores próprios de A .

PROPOSIÇÃO 5.1:

Os valores próprios de uma matriz quadrada A dependem continuamente dos elementos de A .

Em particular $p(A)$ é uma função contínua de A .

1. Revisão Matemática

Matrizes Quadradas e Valores Próprios

PROPOSIÇÃO 7.1:

Para qualquer norma induzida $\| \bullet \|$ e qualquer matriz quadrada A temos:

$$\lim_{k\to\infty} \| A^k \|^{1/k} = \rho(A) \le \| A \|$$

Para além disso, dado um qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma norma induzida $\| \bullet \|$ tal que

$$\| A \| = \rho(A) + \varepsilon$$

PROPOSIÇÃO 8.1:

Seja A uma matriz quadrada. Temos

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \quad \text{sse} \quad \rho(A) < 1.$$

1. Revisão Matemática

Matrizes Simétricas

PROPOSIÇÃO 9.1: Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica. Então

(a) Os valores próprios de A são reais.

(b) A matriz A tem um conjunto de n vectores próprios $x_1 \ldots, x_n$ mutuamente ortogonais, reais, e não nulos.

(c) Suponha que os vectores próprios em *(b)* foram normalizados de modo que $\| x_1 \| = 1$ para cada i .

Então
$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i x_i' ,$$

onde λ_i é o valor próprio correspondente a x_i.

1. Revisão Matemática

Matrizes Simétricas

PROPOSIÇÃO 10.1:

Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica, sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ os seus vectores próprios (reais), e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os vectores próprios ortogonais associados, normalizados de modo que $\| x_1 \| = 1$ para $\forall i$.

Então :

(a) $\| A \| = p\left(\mathrm{A}\right) = \max\left\{ |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n| \right\}$, onde $\| \bullet \|$ é a norma matricial induzida pela norma euclideana.

(b) $\lambda_1 \| y \|^2 \leq y'Ay \leq \lambda_n \| y \|^2$ para $\forall y \in \Re^n$

1. Revisão Matemática

Matrizes Simétricas e Positivas Definidas

PROPOSIÇÃO 11.1:

Seja A uma matriz quadrada, e seja $\| \bullet \|$ uma norma induzida pela norma euclidiana. Então:

(a) Se A é simétrica, então $\| A^k \| = \| A \|^k$ para qualquer inteiro positivo k.

(b) $\| A \|^2 = \| A'A \| = \| AA' \|$.

(c) Se A é simétrica e não-singular, então $\| A^{-1} \|$ é igual ao inverso do mais pequeno dos valores absolutos dos valores próprios de A.

DEFINIÇÃO 4.1:

Uma matriz simétrica $n \times n$ A diz-se *positiva definida* se $x'Ax > 0$ para $\forall x \in \Re^n$, $x \neq 0$.

Diz-se *não – negativa definida* ou *positiva semidefinida* se $x'Ax \geq 0$ para $\forall x \in \Re^n$.

1. Revisão Matemática

Matrizes Simétricas e Positivas Definidas

PROPOSIÇÃO 12.1:

(a) Para qualquer matriz $m \times n$ A , a matriz $A'A$ é simétrica e não – negativa definida

$A'A$ é positiva definida sse A tiver característica n .

Em particular, se $m=n$, $A'A$ é positiva definida sse A é não – singular

(b) Uma matriz quadrada simétrica é não – negativa definida (ou, positiva definida) sse todos os seus valores próprios forem não negativos (ou, positivos)

(c) A inversa de uma matriz simétrica positiva definida é simétrica e positiva definida.

1. Revisão Matemática

Matrizes Simétricas e Positivas Definidas

PROPOSIÇÃO 13.1:

Seja A uma matriz quadrada,simétrica, não – negativa definida

(a) Existe uma matriz simétrica Q com a propriedade $Q^2 = A$. Tal matriz é chamada *raiz quadrada simétrica* de A e é representada por $A^{1/2}$.

(b) Uma raiz quadrada simétrica $A^{1/2}$ é invertível sse A é invertível. A sua inversa é representada por $A^{-1/2}$.

(c) Verifica-se $A^{-1/2} A^{-1/2} = A^{-1}$

(d) Verifica-se $AA^{1/2} = A^{1/2} A$