1. Revisão Matemática

Derivadas

Seja a função $f:\Re^n \to \Re$, fixe $x \in \Re^n$, e considere a expressão :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha e_i)-f(x)}{\alpha},$$

onde e_i é o vector unitário i . Se o limite acima existir, chama-se a derivada parcial i de f no ponto x e é representado por $(\partial f/\partial x_i)(x)$ ou $\partial f(x)/\partial x_i$.

Assumindo que todas estas derivadas parciais existem , o *gradiente* de f em x é definido pelo vector coluna :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

1. Revisão Matemática

Derivadas

Para qualquer $y \in \Re^n$, definimos a *derivada uni-direcional* de f na direcção de y

$$f'(x;y) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x+\alpha y) - f(x)}{\alpha},$$

assumindo que o limite existe. Note a partir das definições que

$$f'(x;e_i) = -f'(x;-e_i) \quad \Rightarrow \quad f'(x;e_i) = (\partial f / \partial x_i)(x)$$

Se derivada direcional de f em x (vector) existe em todas as direcções y e $f'(x;y)$ é uma função linear de y, diz-se que f é diferenciável em x . Este tipo de diferenciabilidade é também chamado diferenciabilidade Gateaux.

1. Revisão Matemática

Derivadas

(i) f é diferenciável em x sse o gradiente $\nabla f(x)$ existe e satisfaz

$$\nabla f(x)'y = f'(x;y) \text{ para todo } y \in \Re^n.$$

(ii) A função f diz-se *diferenciável num dado subconjunto S de* $\Re^n$ se é diferenciável em qualquer $x \in S$. A função f diz-se diferenciável se é diferenciável em todos $x \in \Re^n$.

(iii) Se f é diferenciável num conjunto S e o gradiente $\nabla f(x)$ é contínuo em todo $x \in S$, f diz-se *continuamente diferenciável* em S. Uma tal função é tambem contínua em S e tem a propriedade :

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)'y}{\| y \|} = 0, \quad \forall x \in S,$$

onde $\| \bullet \|$ é uma norma arbitrária .

1. Revisão Matemática

Derivadas

Derivadas de Funções vectoriais

Se $f:\Re^n \to \Re^m$ é uma função vectorial, diz-se diferenciável (continuamente diferenciável) se cada componente f_i de f é diferenciável (continuamente diferenciável).

A *matriz gradiente* de f denominada $\nabla f(x)$, é a matriz $n \times m$ cuja coluna i é gradiente $\nabla f_i(x)$ de f_i. Assim :

$$\nabla f(x) = \left[\nabla f_1(x) \cdots \nabla f_m(x) \right].$$

A transposta de $\nabla f(x)$ é chamada o *Jacobiano* de f

1. Revisão Matemática

Derivadas

Se cada uma das derivadas parciais duma função $f:\Re^n \to \Re$ é uma função continuamente diferenciável de x então usamos a notação :

$$\left(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j\right)(x)$$

para indicar a derivada parcial i de $\partial f / \partial x_j$ num ponto $x \in \Re^n$

A *Hessiana* de f, designada por $\nabla^2 f(x)$, é a matriz cujo elemento ij é igual a :

$$\left(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j\right)(x)$$

Temos $\left(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j\right)(x) = \left(\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i\right)(x)$ para qualquer x e portanto $\nabla^2 f(x)$ é simétrica.

1. Revisão Matemática

Principais teoremas relacionados com funções diferenciáveis

PROPOSIÇÃO 14.1:

Se $f:\Re \rightarrow \Re$ é continuamente diferenciável num intervalo aberto I , então para qualquer $x, y \in I$, existe algum $\xi \in [x, y]$ tal que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi)(y - x)$$

1. Revisão Matemática

Principais teoremas relacionados com funções diferenciáveis

PROPOSIÇÃO 15.1: (Expansões de Segunda Ordem)

Seja $f:\Re^n \rightarrow \Re$ dupla e continuamente diferenciável numa esfera aberta S centrada num vector x.

(a) para todo o y tal que $x+y \in S$,

$$f(x+y) = f(x) + y'\nabla f(x) + \frac{1}{2} y'\left(\int_0^1 \left(\int_0^t \nabla^2 f(x+\tau y)\, d\tau\right) dt\right) y.$$

(b) para todo o y tal que $x+y \in S$, existe um $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$f(x+y) = f(x) + y'\nabla f(x) + \frac{1}{2} y'\nabla^2 f(x+\alpha y) y.$$

(c) para todo o y tal que $x+y \in S$ verifica-se

$$f(x+y) = f(x) + y'\nabla f(x) + \frac{1}{2} y'\nabla^2 f(x) y + o\left(\| y \|^2\right)$$

1. Revisão Matemática

Contracções

Muitos algoritmos iterativos podem ser descritos por :

$$x^{k+1} = g(x^k), \qquad k = 0,1,.....,$$

onde g é uma aplicação de um subconjunto $X \in \Re^n$ em si próprio e tem a propriedade :

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in X$$

Aqui $\| \bullet \|$ é uma norma, e γ é um escalar com $0 \leq \gamma \leq 1$. Uma tal aplicação chama-se uma *contracção*. O escalar γ chama-se *módulo da contracção g*.

NOTA: Uma aplicação g pode ser uma contracção para uma escolha de norma e não o ser para outra escolha

1. Revisão Matemática

Contracções

Seja a aplicação $g: X \rightarrow X$. Qualquer $x^* \in X$ satisfazendo $g(x^*) = x^*$ diz-se um *ponto fixo* de g e a iteração $x^{k+1} = g(x^k)$ define um algoritmo importante para encontrar um tal ponto fixo.

PROPOSIÇÃO 16.1: (Teorema da Contracção)

Suponha que $g: X \rightarrow X$ é uma contracção com módulo $\gamma \in [0,1)$ e que X é um subconjunto fechado de $\Re^n$. Então :

(a) (Existência e Unicidade de Ponto Fixo) A aplicação g tem um único ponto fixo $x^* \in X$.

(b) (Convergência) para qualquer vector inicial $x^0 \in X$, a sequência $\{x^k\}$ gerada por $x^{k+1} = g(x^k)$ converge para x^*. Em particular ,

$$\left\|x^k - x^*\right\| \leq \gamma^k \left\|x^0 - x^*\right\|, \qquad \forall k \geq 0$$