1. Revisão Matemática

Sequências de Escalares

- Uma sequência $\{x_k\}$ diz-se uma *sequência de Cauchy* se para qualquer $\varepsilon>0$ $\exists$ algum K (dependente de ε) tal que :

$$|x_k - x_m| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad k \geq K \quad \text{e} \quad m \geq K$$

- Uma sequência $\{x_k\}$ diz-se ser *limitada superiormente (inferiormente)* se $\exists$ algum escalar b tal que :

$$x_k \leq b \ (x_k \geq b) \ \text{ para } \ \forall k$$

Diz-se *limitada* se é limitada superiormente e inferiormente .

1. Revisão Matemática

Sequências de Escalares

- Uma sequência $\{x_k\}$ diz-se ser *não-crescente* *(não-decrescente)* se $x_{k+1} \le x_k \ (x_{k+1} \ge x_k), \ \forall k$

$$x_k \downarrow x \quad (x_k \uparrow x)$$

PROPOSIÇÃO 17.1:

Qualquer sequência não-crescente ou não-decrescente de escalares converge para um número possivelmente infinito. Se a sequência é tambem limitada então converge para um número real finito.

1. Revisão Matemática

Sequências de Escalares

- O *supremo* de um conjunto (de escalares) não vazio A , denominado de sup$A$, é definido como o menor escalar x tal que $x \geq y$ para $\forall y \in A$

  NOTA: Se um tal escalar não existir, diz-se que o supremo de A é ∞.

- O *ínfimo* é definido de modo semelhante como o maior escalar x tal que $x \leq y$ para $\forall y \in A$

  NOTA: Se um tal escalar não existir, diz-se que o ínfimo de A é $-\infty$.

1. Revisão Matemática

Sequências de Escalares

- Dada uma sequência $\{x_k\}$, o supremo da sequência designado por $\sup_k x_k$ é definido por $\sup\{x_k | k = 1,2,...\}$. (O ínfimo da sequência é definido de modo semelhante).
- Dada uma sequência $\{x_k\}$ seja:

$$y_m = \sup\{\, x_k \mid k \geq m \,\} \;\text{ e }\; z_m = \inf\{\, x_k \mid k \geq m \,\}$$

A sequências $\{y_m\}$ e $\{z_m\}$ são, respectivamente, não-crescentes e não-decrescentes, e portanto têm limite (possivelmente infinito) (Proposição 17.1)

O limite de y_m é designado por $\lim_{m\to\infty} \sup \; x_m$ e o limite de z_m por $\lim_{m\to\infty} \inf \; x_m$.

1. Revisão Matemática

Sequências de Escalares

PROPOSIÇÃO 18.1: Seja $\{x_k\}$ uma sequência de escalares.

(a) Verifica-se

$$\inf_k x_k \le \liminf_{k\to\infty} x_k \le \limsup_{k\to\infty} x_k \le \sup_k x_k$$

(b) $\{x_k\}$ converge sse $\liminf_{k\to\infty} x_k = \limsup_{k\to\infty} x_k$ e, nesse caso, aquelas quantidade s são ambas iguais ao limite de $\{x_k\}$.

(c) Se $x_k \le y_k$

$$\liminf_{k\to\infty} x_k \le \liminf_{k\to\infty} y_k$$

$$\limsup_{k\to\infty} x_k \le \limsup_{k\to\infty} y_k$$

1. Revisão Matemática

Sequências de Vectores

- Uma sequência $\{x_k\}$ de vectores em $\Re^n$ diz-se convergir para $x \in \Re^n$ se a coordenada i de x_k convergir para coordenada i de x para qualquer i .

$$x_k \to x \quad \text{ou} \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x$$

- $\{x_k\}$ diz-se limitada (ou uma sequência de Cauchy) se cada uma das correspondentes sequências de coordenadas for limitada (ou uma sequência de Cauchy respectivamente).

DEFINIÇÃO 5.1:

Diz-se que um vector $x \in \Re^n$ é um *ponto limite de uma sequência* $\{x_k\}$ em $\Re^n$ se existe uma subsequência de $\{x_k\}$ que converge para x. Seja A um subconjunto de $\Re^n$.

Diz-se que $x \in \Re^n$ é um *ponto limite de* A se existe uma sequência $\{x_k\}$ consistindo de elementos de A, que converge para x.

1. Revisão Matemática

Sequências de Vectores

PROPOSIÇÃO 19.1:

(a) Uma sequência limitada de vectores em $\Re^n$ converge sse tem um único ponto limite.

(b) Uma sequência em $\Re^n$ converge sse é uma sequência de Cauchy.

(c) Qualquer sequência limitada em $\Re^n$ tem pelo menos um ponto limite.

(d) Seja $\{x_k\}$ uma sequência de escalares. Se $\limsup_{k\to\infty} x_k$ ($\liminf_{k\to\infty} x_k$) é finito então é o maior (menor) ponto limite de $\{x_k\}$.

NOTA: Se p é um inteiro positivo e $h: \Re^n \to \Re^m$, então diz-se que $h(x) = 0\left(\| x \|^p\right)$ sse $\lim_{x_k \to 0} \frac{h(x_k)}{\|x_k\|^p} = 0$ para todas as sequências $\{x_k\}$, com $x_k \neq 0$ para todo o k, que convergem para 0.

1. Revisão Matemática

Conjuntos Fechados e Abertos

DEFINIÇÃO 6.1:

(a) Um conjunto $A \subset \Re^n$ diz-se *fechado* se contem todos os seus pontos limite. Diz-se *aberto* se o seu complemento (o conjunto $\{x \mid x \notin A\}$) é fechado.

(b) Diz-se *limitado* se $\exists$ algum $c \in \Re^n$ tal que a amplitude de qualquer coordenada de qualquer elemento de A é menor do que c .

(c) Diz-se *compacto* se qualquer sequência de elementos de A tem uma subsequência que converge para um elemento de A.

(d) A *vizinhança* de um vector x é um conjunto aberto contendo x.

(e) Se $A \subset \Re^n$ e, diz-se que x é um ponto *interior* de A se existe uma vizinhança de x que está contida em A.

(f) Um vector $x \in A$ que não é um ponto interior de A diz-se ser um *ponto de fronteira* de A.

1. Revisão Matemática

Conjuntos Fechados e Abertos

PROPOSIÇÃO 20.1:

(a) A união de um número finito de conjuntos fechados é fechada.

(b) A intersecção de conjuntos fechados é fechada.

(c) A união de conjuntos abertos é aberta.

(d) A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é aberta.

(e) Um conjunto é aberto sse todos os seus elementos são pontos interiores.

(f) Qualquer subespaço de $\Re^n$ é fechado

(g) Um subconjunto de $\Re^n$ é compacto sse é fechado e limitado

1. Revisão Matemática

Continuidade

Seja $A \subset \Re^n$ e $f : A \rightarrow \Re^n$. Seja x um ponto limite de A.

- Se a sequência $\{f(x_k)\}$ tem um limite comum z para qualquer sequência $\{x_k\}$ de elementos de A tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = x$, então podemos escrever que :

$$\lim_{y \to x} f(y) = z$$

A notação $\lim_{y \uparrow x} f(y)$ significa limite de $f(x_k)$ onde $\{x_k\}$ é uma subsequência de elementos de A convergindo para x e satisfazendo $x_k \leq x$.

1. Revisão Matemática

Continuidade

DEFINIÇÃO 7.1: Seja $A \subset \Re^m$

(a) Uma função $f : A \rightarrow \Re^n$ diz-se *continua num ponto* $x \in A$ se

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x).$$

Diz-se continua em A se é continua em qualquer $x \in A$.

(b) Uma função real $f : A \rightarrow \Re$ diz-se *semi-contínua superior* num vector $x \in A$ se

$$f(x) \geq \limsup_{k \to \infty} f(x_k)$$

para qualquer sequência $\{x_k\}$ de elementos de A convergindo para x .

Continuidade

(c) Uma função real $f : A \to \Re$ diz-se *coerciva* se $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \infty$ para qualquer sequência $\{x_k\}$ de elementos de A tal que $\| x_k \| \to \infty$ para alguma norma $\| \bullet \|$.

(d) Seja $A \subset \Re$. Uma função $f : A \to \Re^n$ diz-se *contínua à direita*, num ponto $x \in A$ se

$$\lim_{y \downarrow x} f(y) = f(x)$$

NOTA : É fácil de ver que quando $A \subset \Re$, uma função não-decrescente e contínua à direita $f : A \to \Re$ é semi-contínua superior.

1. Revisão Matemática

Continuidade

PROPOSIÇÃO 21.1:

(a) A composição de duas funções contínuas é contínua.

(b) Qualquer norma do vector $\Re^n$ é uma função contínua .

(c) Seja $f : \Re^m \to \Re^n$ contínua, e seja $A \subset \Re^n$ aberto (fechado).

Então o conjunto $\{x \in \Re^m \mid f(x) \in A\}$ é aberto (fechado).

1. Revisão Matemática

Conjuntos Fechados e Abertos

PROPOSIÇÃO 22.1: (Teorema de Weierstrass)

Seja A um subconjunto não vazio de $\Re^n$ e seja $f : A \rightarrow \Re$ uma função semi-contínua inferior em todos os pontos de A.

Assuma que uma das seguintes condições se verifica :

(1) A é compacto

(2) A é fechado e f é coerciva

(3) Existe um escalar γ tal que o conjunto $\{x \in A \mid f(x) \leq \gamma\}$ é não vazio e compacto.

Então, existe um vector $x \in A$ tal que

$$f(x) = \inf_{z \in A} f(z) \qquad\qquad x = \arg\min_{z \in A} f(z)$$

1. Revisão Matemática

Conjuntos Fechados e Abertos

PROPOSIÇÃO 23.1: (Propriedade de equivalência de normas):

Para quaisquer duas normas $\| \bullet \|$ e $\| \bullet \|'$ em $\Re^n$, existe alguma constante positiva $c \in \Re$ tal que $\| x \| \leq c \| x \|' \quad \forall x \in \Re^n$

NOTA : Se uma sequência converge com respeito a uma norma, então converge com respeito a todas as outras normas

PROPOSIÇÃO 24.1:

Se um subconjunto de $\Re^n$ é aberto (fechado, limitado, ou compacto) para alguma norma, então é aberto (fechado, limitado, ou compacto) para todas as outras normas.

2. Análise Convexa

Conjuntos e Funções Convexas

DEFINIÇÃO 1.2: Seja C um subconjunto de $\Re^n$. Diz-se que C é convexo se

$$\alpha\, x + (1-\alpha)y \in C \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0,1] \qquad \textbf{(D1.2)}$$

DEFINIÇÃO 2.2: Seja C um subconjunto convexo de $\Re^n$. A função $f: C \to \Re$ diz-se convexa se

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\, f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0,1] \qquad \textbf{(D2.2)}$$

OBS: (a) f diz-se *côncava* se $-f$ é convexa

(b) f diz-se *estrictamente convexa* se a desigualdade em (D2.2) for estricta para todos os $x,y \in C$ com $x \neq y$ e $\forall\, \alpha \in (0,1)$.

2. Análise Convexa

Conjuntos e Funções Convexas

PROPOSIÇÃO 1.2:

(a) Para qualquer colecção $\{C_i \mid i \in I\}$ de conjuntos convexos, o conjunto de intersecção $\cap_{i \in I} C_i$ é convexo.

(b) A soma vectorial $\{ x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2 \}$ de dois conjuntos convexos C_1 e C_2 é convexo.

(c) A imagem de um conjunto sob uma transformação linear é convexa.

(d) Se C é um conjunto convexo e $f : C \to \Re$ é uma função convexa, os conjuntos $\{ x \in C \mid f(x) \leq \alpha \}$ e $\{ x \in C \mid f(x) < \alpha \}$ são convexos para todos os escalares α.

2. Análise Convexa

Conjuntos e Funções Convexas

PROPOSIÇÃO 2.2:

(a) Uma funçaõ linear é convexa.

(b) Qualquer norma de um vector é convexa.

(c) A soma pesada de funções convexas, (com pesos positivos), é convexa.

(d) Se I é um conjunto de índices, $C \subset \Re^n$ é um conjunto, e $f_i : C \to \Re^n$ é convexo para cada $i \in I$, então a função $h : C \to (-\infty, +\infty]$ definida por :

$$h(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$ é também convexa.

2. Análise Convexa

Caracterização de Funções Convexas Diferenciáveis

PROPOSIÇÃO 3.2:

Seja $C \subset \Re^n$ um conjunto convexo e seja $f : \Re^n \rightarrow \Re$ diferenciável em C.

(a) A função f é convexa em sse.

$$f(z) \geq f(x) + (z - x)' \nabla f(x) \qquad \forall x, z \in C.$$

(b) Se a desigualdade anterior for estrita sempre que $x \neq z$, então f é estritamente convexa em C.

2. Análise Convexa

Caracterização de Funções Convexas Diferenciáveis

PROPOSIÇÃO 4.2:

Seja $C \subset \Re^n$ um conjunto convexo e seja $f : \Re^n \to \Re$ dupla e continuamente diferenciável em C, e seja Q uma matriz real simétrica $n \times n$.

(a) Se $\nabla^2 f(x)$ é positiva semidefinida para todo $x \in C$, então f é convexa em C.

(b) Se $\nabla^2 f(x)$ é positiva definida para qualquer $x \in C$, então f é estritamente convexa em C.

(c) Se $C = \Re^n$ e f é convexa, então $\nabla^2 f(x)$ é positiva semidefinida para todo $x \in C$.

(d) A função quadrática $f(x) = x'Qx$, onde Q é uma matriz simétrica. É convexa sse Q é positiva semidefinida. Para além disso, f é estritamente convexa sse Q é positiva definida.

OBS: (c) também se verifica quando se assume que C tem um interior não vazio (em vez de ser igual a $\Re^n$).