Optimização e Algoritmos
1ºSemestre – 2003/2004
LEEC

Série de Problemas nº 1
Soluções

1.

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{Minimize}} & -6x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 3x_4 - 9x_5 - 5x_6 \\ \textbf{\textit{sujeito a}}: & x_1 + x_2 \leq 480 \\ & x_3 + x_4 \leq 400 \\ & x_5 + x_6 \leq 230 \\ & x_1 + x_3 + x_5 \leq 240 \\ & x_2 + x_4 + x_6 \leq 250 \end{array}$$

2. (i) Na forma ***standard*** teremos***:***

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{Minimize}} & -3x_1 + 5x_2 \\ \textbf{\textit{sujeito a}}: & 4x_1 + 5x_2 - y_1 = 3 \\ & 6x_1 - 6x_2 = 7 \\ & x_1 + 8x_2 + y_2 = 20 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

(ii) A variável x_5 é livre. Então podemos usar qualquer um dos seguintes métodos:

· Faça $x_5 = u_5 - v_5$ $\qquad u_5 \geq 0, \quad v_5 \geq 0$

O problema pode então ser expresso em função de $x_1, x_2, x_3, x_4, u_5, v_5$.

- Podemos começar por transformar as desigualdades em igualdades introduzindo variáveis "***slack***" x_6 e x_7.

$$9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 + x_6 = 5$$
$$8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 3x_5 + x_7 = 2$$

Agora podemos eliminar x_5 e expressar as restrições e a função de custo nas novas variáveis.

(iii) Na forma ***standard*** teremos***:***

$$\begin{array}{ll} \textit{\textbf{Minimize}} & -8x_1 + 4x_2 \\ \textit{\textbf{sujeito a}}: & 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ & -9x_1 - 5x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

3. (i) Formulemos o problema na forma ***standard***:

$$\begin{array}{ll} \textit{\textbf{Minimize}} & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \textit{\textbf{sujeito a}}: & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Seja então o primeiro tableau:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
1	1	2	1	0	0	4
2	0	3	0	1	0	5
2	1	3	0	0	1	7
-3	-2	-4	0	0	0	$0 = -z_0$

A solução básica factível correspondente é:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}'$$

Observando os valores de $\mathbf{r}$ verifica-se que $\mathbf{x}_3$ deve entrar na base, uma vez que -4 é o valor mais negativo dos $\mathbf{r's}$. O elemento a escolher para pivot deve ser 3 uma vez que $\frac{5}{3} \approx 1{,}66$ é menor do que $\frac{4}{2} = 2$ e $\frac{7}{3} \approx 2{,}3$.

Assim o novo tableau resultante da operação de pivotagem é:

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
-1/3	1	0	1	-2/3	0	2/3
2/3	0	1	0	1/3	0	5/3
0	1	0	0	-1	1	2
-1/3	-2	0	0	4/3	0	20/3

A nova solução básica factível é:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5/3 & 2/3 & 0 & 2 \end{bmatrix}'$$

E agora é a coluna (vector) $\mathbf{a}_2$ que deve entrar na base, uma vez que -2 é o valor mais negativo dos $\mathbf{r's}$. O pivot está assinalado a sombreado.

O novo tableau será agora dado por:

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
-1/3	1	0	1	-2/3	0	2/3
2/3	0	1	0	1/3	0	5/3
1/3	0	0	-1	-1/3	1	4/3
-1	0	0	2	0	0	8

A nova solução básica factível é:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 5/3 & 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}'$$

desta vez x_1 será a variável a entrar para a base (ou seja a tornar-se básica), uma vez que -1 é o valor mais negativo dos $r's$. O pivot está assinalado a sombreado.

O novo tableau será agora dado por:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
0	1	0,5	1	-0,5	0	1,5
1	0	1,5	0	0,5	0	2,5
0	0	-0,5	-1	-0,5	1	0,5
0	0	1,5	2	0,5	0	10,5

Uma vez que todos os $r's$ são não negativos atingimos a solução óptima:

$$x^* = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}'$$

com custo óptimo de -10,5.

(ii) Formulemos o problema na forma ***standard***:

$$\begin{aligned}
&\textbf{\textit{Minimize}} \quad && -5x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 8x_4 \\
&\textbf{\textit{sujeito a}}: \quad && x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\
& && x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 3 \\
& && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

Seja então o primeiro tableau:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
1	2	3	1	1	0	5
1	1	2	3	0	1	3
-5	-6	-9	-8	0	0	$0 = -z_0$

A solução básica factível correspondente é:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}'$$

Observando os valores de $\boldsymbol{r}$ verifica-se que $\boldsymbol{x}_3$ deve passar a ser básica, uma vez que -9 é o valor mais negativo dos $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{s}$. O elemento a escolher para pivot deve ser 2 uma vez que $\frac{3}{2} = 1{,}5$ é menor do que $\frac{5}{3} \approx 1{,}6...$

O próximo tableau é então:

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{b}$
-0,5	0,5	0	-3,5	1	-1,5	0,5
0,5	0,5	1	1,5	0	0,5	1,5
-0,5	-1,5	0	5,5	0	4,5	13,5

A nova solução básica factível é:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}'$$

E o custo associado -13,5.

Agora considera-se a entrada para a base de $\boldsymbol{a}_2$ (ou seja a passagem de $\boldsymbol{x}_2$ a variável básica). O pivot deve ser o assinalado a sombreado uma vez que $\frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \leq \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$.

O tableau seguinte será então:

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{b}$
-1	1	0	-7	2	-3	1
1	0	1	5	-1	2	1
-2	0	0	-5	3	0	15

A nova solução básica factível é:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

E o custo associado -15.

Agora é a variável $\boldsymbol{x}_4$ que deve passar a ser básica, uma vez que -5 é o valor mais negativo dos $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{s}$. O pivot está assinalado a sombreado.

O novo tableau será agora dado por:

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{b}$
2/5	1	7/5	0	3/5	-1/5	12/5
1/5	0	1/5	1	-1/5	2/5	1/5
-1	0	1	0	2	2	16

A nova solução básica factível é:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 12/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

E o custo associado -16.

Agora considera-se a entrada para a base de $\boldsymbol{a}_1$ (ou seja a passagem de $\boldsymbol{x}_1$ a variável básica).

O tableau será agora dado por:

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{b}$
0	1	1	-2	1	-1	2
1	0	1	5	-1	2	1
0	0	2	5	1	4	17

Uma vez que todos os $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{s}$ são não negativos atingimos a solução óptima:

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

com custo óptimo de -17.

4. Formulemos o problema na forma ***standard***:

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{Minimize}} & -3\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \\ \textbf{\textit{sujeito a}}: & -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 1 \\ & \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4 = 3 \\ & 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_5 = 4 \\ & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5 \geq 0 \end{array}$$

Seja então o tableau correspondente:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
-1	1	-1	0	0	1
1	1	0	-1	0	3
2	1	0	0	1	4

A solução básica correspondente não é factível e portanto não podemos inicializar o SIMPLEX.

Consideremos então o problema auxiliar (**1ª fase do SIMPLEX**):

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{Minimize}} & y_1 + y_2 + y_3 \\ \textbf{\textit{sujeito a}}: & -x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_4 + y_2 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_5 + y_3 = 4 \end{array}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	y_1	y_2	y_3	b
-1	1	-1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	-1	0	0	1	0	3
2	1	0	0	1	0	0	1	4
-2	-3	1	1	-1	0	0	0	-8

Os valores de r obtêm-se expressando o custo em função das variáveis não básicas.

Assim:

$$y_1 + y_2 + y_3 = \left(1 + x_1 - x_2 + x_3\right) + \left(3 - x_1 - x_2 + x_4\right) + \left(4 - 2x_1 - x_2 - x_5\right) =$$

$$= 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5$$

Iterando no SIMPLEX vão-se obtendo as seguintes tabelas:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	y_1	y_2	y_3	b
-1	1	-1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	-1	0	-1	1	0	2
3	0	1	0	1	-1	0	1	3
-5	0	-2	1	-1	3	0	0	-5

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_2$	$\boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{b}$
0	1	-2/3	0	1/3	2/3	1	1/3	2
0	0	1/3	-1	-2/3	-1/3	1	-2/3	0
1	0	1/3	0	1/3	-1/3	0	1/3	1
0	0	-1/3	1	2/3	4/3	0	5/3	0

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_2$	$\boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{b}$
0	1	0	-2	-1	0	3	-1	2
0	0	1	-3	-2	-1	3	-2	0
1	0	0	1	1	0	-1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0

A solução básica é:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

e o correspondente custo é zero.

Esta solução básica é factível e portanto podemos usá-la para inicializar a **2ª fase SIMPLEX**.

O tableau para o problema original é então:

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{b}$
0	1	0	-2	-1	2
0	0	1	-3	-2	0
1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	2	5

Verifica-se que a solução básica factível obtida (degenerada) é óptima.

Portanto

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

e o correspondente custo óptimo é -5.