Optimização e Algoritmos
1ºSemestre – 2003/2004
LEEC

Série de Problemas nº 2
Soluções

1. Dada a função:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \beta\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}$$

temos :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + 1 \\ 2\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{x} + 2 \end{bmatrix}$$

fazendo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem uma solução única (um único ponto de estacionaridade) excepto quando $\beta^2 = 4$.

Se $\beta^2 = 4$, pode verificar-se que o sistema de equações não tem solução (não existe ponto de estacionaridade).

Se $\beta^2 \neq 4$, para que o ponto de estacionaridade seja um mínimo local, o hessiano da função dado por:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix}$$

tem de ser positivo semi-definido. Mas se assim for, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ será uma função quadrática (convexa) e cada mínimo local será global.

O hessiano $\boldsymbol{Q}$ será positivo definido sse $\beta^2 < 4$, e positivo semi-definido se $\beta^2 = 4$ (caso em que não existe ponto de estacionaridade, como vimos acima).
Então, se $\beta^2 < 4$, existirá um único ponto de estacionaridade que é um mínimo global.
Se $\beta^2 = 4$, não existe ponto de estacionaridade.
Se $\beta^2 > 4$, existirá um único ponto de estacionaridade que, no entanto, não é um mínimo local.

2. (a) Temos

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 4\boldsymbol{x}^3 - 16\boldsymbol{x} \\ 2\boldsymbol{y} \end{bmatrix}, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 12\boldsymbol{x}^2 - 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Então os pontos de estacionaridade de $\boldsymbol{f}$ são $(0 \quad 0)$, $(2 \quad 0)$ e $(-2 \quad 0)$
Uma vez que:

$$\boldsymbol{f}(2,0) = \boldsymbol{f}(-2,0) = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}$$

Temos que $(2 \quad 0)$ e $(-2 \quad 0)$ são mínimos globais de $\boldsymbol{f}$.

Uma vez que $\nabla^2 \boldsymbol{f}(0,0) = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ tem um valor próprio positivo e outro negativo, $(0 \quad 0)$ não é nem um máximo nem um mínimo local (é um ponto de sela).

(b) Temos:

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} + \cos \boldsymbol{y} \\ -\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{y} \end{bmatrix}, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{y} \\ -\boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{y} & -\boldsymbol{x}\cos \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

Então os pontos de estacionaridade de $\boldsymbol{f}$ são:

$$\left\{ \left((-1)^{(\boldsymbol{k}+1)}, \boldsymbol{k}\pi \right) \middle| \boldsymbol{k} = \text{int}\boldsymbol{eiro} \right\}, \quad \left\{ \left(0, \boldsymbol{k}\pi + \frac{\pi}{2} \right) \middle| \boldsymbol{k} = \text{int}\boldsymbol{eiro} \right\}.$$

Destes, os mínimos locais são:

$$\left\{ \left((-1)^{(k+1)},\ k\pi \right) \,\middle|\, k = \text{int}\,\boldsymbol{eiro} \right\}.$$

(c) Temos:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x + \cos(x+y) \\ \cos y + \cos(x+y) \end{bmatrix},$$

$$^{2}f(x,y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(x+y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x+y) \end{bmatrix}$$

Então os pontos de estacionaridade de f são:

$$(\pi,\pi) \text{ e } \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$$

Uma vez que:

$$^{2}f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad \text{então} \quad \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \text{ é um máximo local}$$

$$^{2}f\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right) > 0 \quad \text{então} \quad \left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right) \text{ é um mínimo local}$$

No que respeita a (π,π) temos $^{2}f(\pi,\pi) = 0.$

Para determinar se (π,π) é um máximo ou um mínimo local, fazemos:

$$x = \pi + \varepsilon, \qquad y = \pi + \varepsilon$$

Para ε pequeno em valor absoluto.
Então temos que:

$$f(\pi+\varepsilon,\pi+\varepsilon) > 0 \quad \text{para} \quad \varepsilon < 0$$

e

$$f(\pi+\varepsilon,\pi+\varepsilon) < 0 \quad \text{para} \quad \varepsilon > 0$$

Logo (π,π) não pode ser nem um máximo local nem um mínimo local.

(d) Temos:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4xy - 2x \\ -2x^2 + 2y \end{bmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4y - 2 & -4x \\ -4x & 2 \end{bmatrix}$$

O único ponto de estacionaridade é portanto $(0,0)$.

Como $\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, tem dois valores próprios de sinal contrário, $(0,0)$ não é um mínimo local nem um máximo local.

(e) Não é fornecida solução para este problema.

3. (a) Uma vez que a função $g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$ é minimizada em $\alpha = 0$ para todo o $d \in \mathbb{R}^n$ temos que para todo o α e i temos:

$$f(x^* + \alpha e_i) \geq f(x^*),$$

o que implica

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x^* + \alpha e_i) - f(x^*)}{\alpha} \geq 0, \qquad \lim_{\alpha \to 0^-} \frac{f(x^* + \alpha e_i) - f(x^*)}{\alpha} \leq 0,$$

ou

$$\left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}\right) = 0, \qquad i.$$

(b) Considere o a função $f(y,z) = (z - py^2)(z - qy^2)$, com $0 < p < q$

e seja $x^* = (0,0)$.

Vamos primeiro provar que $g(\alpha)$ é minimizada em $\alpha = 0$ para todo o $d \quad R^2$.

Temos então:

$$g(\alpha) = f(x^* + \alpha d) = f(\alpha d) = (\alpha d_2 - p\alpha^2 d_1^2)(\alpha d_2 - q\alpha^2 d_1^2) = \alpha^2 (d_2 - p\alpha d_1^2)(d_2 - q\alpha d_1^2).$$

Também:

$$g'(\alpha) = 2\alpha(d_2 - p\alpha d_1^2)(d_2 - q\alpha d_1^2) + \alpha^2(-pd_1^2)(d_2 - q\alpha d_1^2) + \alpha^2(d_2 - p\alpha d_1^2)(-qd_1^2).$$

Então $g'(0) = 0$. Além disso temos:

$$\begin{aligned} g''(\alpha) = {} & 2(d_2 - p\alpha d_1^2)(d_2 - q\alpha d_1^2) + 2\alpha(-pd_1^2)(d_2 - q\alpha d_1^2) + 2\alpha(d_2 - p\alpha d_1^2)(-qd_1^2) + \\ & + 2\alpha(-pd_1^2)(d_2 - q\alpha d_1^2) + \alpha^2(-pd_1^2)(-qd_1^2) + \\ & + 2\alpha(d_2 - p\alpha d_1^2)(-qd_1^2) + \alpha^2(-pd_1^2)(-qd_1^2). \end{aligned}$$

Então $g''(0) = 2d_2^2$ que é maior do que zero se $d_2 \neq 0$. Se $d_2 = 0$, $g(\alpha) = pq\alpha^4 d_1^4$ que é claramente minimizada em $\alpha = 0$.

ENTÃO, $(0,0)$ é um mínimo local de f ao longo de todas as linhas rectas que passam em $(0,0)$.

Vamos agora mostrar que se $0 < p < q$, então:

$f(y, my^2) < 0$ se $y \neq 0$

e

$f(y, my^2) \geq 0$ caso contrário.

Considere um ponto da forma (y, my^2). Então teremos

$$f(y, my^2) = y^4 (m - p)(m - q).$$

Claramente, $f(y, my^2) < 0$ se e só se $0 < p < q$ e $y \neq 0$.

Em qualquer vizinhança ε de $(0,0)$, existe um $y \neq 0$ tal que para algum m (p,q), (y, my^2) também pertence à vizinhança. Uma vez que $f(0,0) = 0$, **Verificamos que $(0,0)$ não é um mínimo local.**

4. Temos:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 \qquad \text{e} \qquad {}^2 f(x) = \frac{2}{x^3}$$

Então os pontos de estacionaridade de f são $x = \pm 1$.

Como $x > 0$, seleccionamos apenas $x = 1$.

Como ${}^2 f(1) > 0$, e $f(x)$ é uma função convexa $x = 1$ é um mínimo global.

Logo $\frac{1}{x} + x = f(x) \geq f(1) = 2$.

5.

A área do paralelepípedo é dada por $A = 2xy + 2yz + 2zx$

A restrição de volume unitário impõe a seguinte relação entre variáveis:

$$z = \frac{1}{xy}$$

Por eliminação de z podemos formular o problema de minimização apenas em função de x e y.

$$\min \left(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

Agora, temos:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} y - \dfrac{1}{x^2} \\ x - \dfrac{1}{y^2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{y^3} \end{bmatrix}$$

Assim $(1,1)$ é o único ponto de estacionaridade da função.

Como ${}^2 f(1,1) > 0$ então $(1,1)$ é o mínimo global da função.

Assim, o paralelepípedo de volume unitário com superfície de área mínima é o cubo de arestas unitárias.