Optimização e Algoritmos
1ºSemestre – 2003/2004
LEEC

Série de Problemas nº 3
Soluções

1.

Não é fornecida solução para este problema.

2.

Não é fornecida solução para este problema

3.

Seja $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^{k} - \alpha^{*} \quad \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{k}\right)$ onde $\alpha^{*} > 0$ minimiza de forma exacta

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(\alpha)\right) = \boldsymbol{g}(\alpha).$$

Então
$$\left.\frac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{g}(\alpha)}{\boldsymbol{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{*}} = 0$$

ou
$$\left.\frac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{g}(\alpha)}{\boldsymbol{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{*}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{/}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{k+1}} . \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{*}} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{k+1}\right)' \quad \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{k}\right) = 0$$

4.

Se λ_i for um valor próprio de $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{d}_i$ for o correspondente vector próprio associado, temos:

$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{d}_i = \lambda_i \boldsymbol{d}_i$ para $\boldsymbol{i} = 1,\ldots,\boldsymbol{n}$

Uma vez que Q é uma matriz nxn, simétrica, os seus valores próprios são reais e os vectores próprios são mutuamente ortogonais, pelo que:

$$d_j' Q d_i = \lambda_i d_j' d_i = 0 \quad \text{para} \quad j \neq i .$$

5.

Vamos fazer a prova duma forma recursiva:

Seja $d_1 = a_1$.

Suponhamos agora que para $i < k$ escolhemos um conjunto de direcções conjugadas $d_1,\ldots,d_i$ de tal modo que:

(o subespaço gerado por $d_1,\ldots,d_i$) = (o subespaço gerado por $a_1,\ldots,a_i$).

Seja agora $$d_{i+1} = a_{i+1} + \sum_{m=1}^{i} c^{(i+1)m} d_m , \qquad (1)$$

e escolhamos $c^{(i+1)m}$ de modo que d_{i+1} seja $Q-$conjugado com $d_1,\ldots,d_i$.

Então teremos de ter:

$$d_{i+1}' Q d_j = a_{i+1}' Q d_j + \left(\sum_{m=1}^{i} c^{(i+1)m} d_m \right)' Q d_j = 0 \qquad j = 1,\ldots, i$$

Como $d_1,\ldots,d_i$ são $Q-$conjugados temos $d_m Q d_j = 0$ se $m \neq j$.

Para $m = j$:

$$a_{i+1}' Q d_j = -c^{(i+1)j} d_j' Q d_j \qquad j = 1,\ldots, i$$

donde: $$c^{(i+1)j} = -\frac{a_{i+1}' Q d_j}{d_j' Q d_j} \qquad j = 1,\ldots,i$$

Substituindo em (1) com $m = j$ vem:

$$\boldsymbol{d}_{i+1}=\boldsymbol{a}_{i+1}-\sum_{j=1}^{i}\frac{\boldsymbol{a}_{i+1}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{d}_j}{\boldsymbol{d}_j'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{d}_j}\boldsymbol{d}_j$$

Fazendo agora $\boldsymbol{i}+1=\boldsymbol{k}$ vem finalmente:

$$d_k=\begin{cases} a_k & \text{se} \quad k=1 \\ a_k-\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{d_i'Qa_k}{d_i'Qd_i}\right]d_i & \text{se} \quad \mathrm{k}\geq 2 \end{cases}$$