Optimização e Algoritmos
1ºSemestre – 2003/2004
LEEC

Série de Problemas nº 4
Soluções

1. Seja a função $f : R^2 \rightarrow R$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$$

Vamos representá-la na forma compacta:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$$

Calculando agora os valores próprios da matriz hessiana H:

$$|\boldsymbol{H} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 \qquad \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (-4-\lambda)(-6-\lambda) - 16 = 0$$

donde: $\lambda_1 = -5 + \sqrt{17} < 0$; $\lambda_2 = -5 - \sqrt{17} < 0$

Como os dois valores próprios são negativos então H é negativa definida e a função é côncava.

2. Como a função e o conjunto das restrições Ω são convexos é condição necessária e suficiente para que $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}'$ seja um mínimo da função, que:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)'(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \geq 0 \qquad x \quad \Omega$$

ou seja: $\left.\begin{bmatrix} \left(x_1^* - \frac{3}{2}\right) & \left(x_2^* - 5\right) \end{bmatrix}\right|_{\substack{x_1^*=1 \\ x_2^*=3}} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix} \geq 0 \qquad x_1 + 4x_2 \leq 13$

Ora somando as equações correspondentes às restrições:

$-x_1 + x_2 \leq 2$; $2x_1 + 3x_2 \leq 11$ verifica-se que para todo x em Ω se satisfaz a condição de optimalidade em x^*.

3. Não é fornecida resolução para este problema.

4. Não é fornecida resolução para este problema.

5.

a) Método da procura uniforme: $n \geq \dfrac{b_1 - a_1}{L/2} - 1$

O método consiste na avaliação da função em n pontos do intervalo de incerteza inicial $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix}$ e na escolha para intervalo de incerteza final do que contém no seu meio o valor mínimo da função. Divida-se então $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ em n+1 sub-intervalos de amplitude δ.

Então $L = 2\delta$ e $n + 1 \geq \dfrac{b_1 - a_1}{\delta}$ $\qquad n \geq \dfrac{b_1 - a_1}{L/2} - 1$

b) Método da procura dicotómica: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \leq \dfrac{L}{b_1 - a_1}$

É possível demonstrar que para este método a largura do intervalo de incerteza no início da iteração k+1 é dada por:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2^k}\left(b_1 - a_1\right) + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

como $\varepsilon > 0$ e $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) > 0$ temos que $b_{k+1} - a_{k+1} \geq \frac{1}{2^k}\left(b_1 - a_1\right)$

se $b_{k+1} - a_{k+1} = L$ for o intervalo final de incerteza teremos:

$L \geq \frac{1}{2^k}\left(b_1 - a_1\right)$ $\quad\frac{L}{b_1 - a_1} \geq \frac{1}{2^k}$ ou uma vez que em cada iteração se fazem duas avaliações da função e portanto $k = \frac{n}{2}$ teremos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \leq \frac{L}{b_1 - a_1}$$

c) Método da “Golden section”: $\left(0{,}618\right)^{n-1} \leq \frac{L}{b_1 - a_1}$

Neste método em cada iteração o intervalo de incerteza é reduzido de um factor constante:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = 0{,}618\left(b_k - a_k\right)$$

donde

$$b_{k+1} - a_{k+1} = 0{,}618^k\left(b_1 - a_1\right)$$

onde k (número de iterações) se relaciona com n (número de observações ou avaliações da função) através de:

$k = n - 1$ uma vez que neste método se fazem duas observações na primeira iteração mas apenas uma em cada uma das restantes iterações.

Então teremos:

$$b_{k+1} - a_{k+1} \leq L \qquad 0{,}618^{n-1} \leq \frac{L}{b_1 - a_1}$$

d) Método de Fibonacci: $F_n \geq \frac{b_1 - a_1}{L}$

Neste método em cada iteração obtém-se uma redução do intervalo de incerteza dada por:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}\left(b_k - a_k\right)$$

Então para $k = n - 1$ podemos escrever:

$$b_n - a_n = \frac{F_1}{F_2}.\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) = \frac{F_1}{F_2}.\frac{F_2}{F_3}\left(b_{n-2} - a_{n-2}\right) = \frac{F_1}{F_2}.\frac{F_2}{F_3}.....\frac{F_{n-1}}{F_n}\left(b_1 - a_1\right):$$

$$= \frac{F_1}{F_n}\left(b_1 - a_1\right) = \frac{1}{F_n}\left(b_1 - a_1\right)$$

para garantir que $b_{k+1} - a_{k+1} \leq L$

Teremos

$$\frac{1}{F_n}\left(b_1 - a_1\right) \leq L \qquad F_n \geq \frac{b_1 - a_1}{L}$$

6. Não é fornecida resolução para este problema.