Optimização e Algoritmos
1ºSemestre – 2003/2004
LEEC

Série de Problemas nº 5
Soluções

1. **a)**

$$\min \int_0^T \left| y(t) - c(t) \right| dt$$

$$s.a. \quad \left| \dot{y}(t) \right| \le b_1 \qquad t \quad [0,T]$$

$$\left| \ddot{y}(t) \right| \le b_2 \qquad t \quad [0,T]$$

$$y(0) = a$$

$$y(T) = b$$

b)

$$\min \sum_{k=1}^{K} \left| y_{1,k} - c_k \right|$$

$$s.a. \quad y_{1,k} - y_{1,k-1} = y_{2,k-1} \qquad k = 1,\ldots,K$$

$$-b_1 \le y_{2,k} \le b_1 \qquad k = 1,\ldots, K$$

$$-b_2 \le y_{2,k} - y_{2,k-1} \le b_2 \qquad k = 1,\ldots,K$$

$$y_{1,0} = a$$

$$y_{1,k} = b$$

2. Não é fornecida a resolução deste problema.

3. Não é fornecida a resolução deste problema.

4.

Seja o problema:

Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

sujeito a: $x_1 + x_2 - 2 = 0$

(a) O problema pode ser resolvido pelo método de eliminação de uma das variáveis.;

Da equação das restrições resulta: $\boldsymbol{x}_1 = 2 - \boldsymbol{x}_2$

Substituindo na função de custo vem:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = (2 - \boldsymbol{x}_2)^2 + \boldsymbol{x}_2^2$$

e então o problema consiste em:

$$\min_{\boldsymbol{x}_2 \ \boldsymbol{R}} (2 - \boldsymbol{x}_2)^2 + x_2^2$$

Então:

$$\frac{\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}_2)}{\boldsymbol{dx}_2} = -2(2 - \boldsymbol{x}_2) + 2\boldsymbol{x}_2 = 0 \qquad \boldsymbol{x}_2 = 1$$

e $\boldsymbol{x}_1 = 2 - \boldsymbol{x}_2 = 1$.

Logo a solução óptima é $[1,1]$.

É fácil de verificar que as condições de Kuhn -Tucker

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) + \lambda^* \ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*) = 0$ se verificam.

(b) Não é fornecida resolução para este problema.

5. (a)

$$\min \; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

$$\text{s.a.} \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0$$

Temos:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} \qquad {}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e} \qquad {}^2\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0$$

onde $\boldsymbol{e} = [1, 1, \ldots, 1]' \quad \boldsymbol{R}^n$

Como $\boldsymbol{f}$ é uma função convexa qualquer mínimo local é também global.

Qualquer ponto factível é regular e portanto existe um multiplicador de Lagrange λ^* tal que:

$$2\boldsymbol{x}^* + \lambda^* \boldsymbol{e} = 0$$

A única solução (factível) desta equação é:

$$\boldsymbol{x}^* = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right] \quad \text{com} \quad \lambda^* = -\frac{2}{n}$$

Uma vez que:

$$ {}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \lambda^* \; {}^2\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{x}$$

Verificamos que $\boldsymbol{x}^*$ é um mínimo global de $\boldsymbol{f}$ sujeito à restrição (porque é o único ponto satisfazendo às condições necessárias de 1ª e 2ª ordem).

(b)

$$\min \; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\boldsymbol{s.a.} \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2 - 1 = 0$$

Para qualquer $\boldsymbol{x}$ factível teremos:

$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} \neq 0$ e portanto $\boldsymbol{x}$ é regular.

Do teorema dos Multiplicadores de Lagrange se $\boldsymbol{x}^*$ for um mínimo local então existe um λ^* tal que:

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) + \lambda^* \nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + 2\lambda^* \boldsymbol{x}^* = 0$$

Combinado este resultado com $\|\boldsymbol{x}\|^2 = 1$ (ou seja com $\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 + \ldots + \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}^2 = 1$).

Segue que:

$$\left(\boldsymbol{x}_i^*, \lambda^*\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \frac{-\sqrt{\boldsymbol{n}}}{2}\right) \qquad \forall \boldsymbol{i}$$

ou

$$\left(\boldsymbol{x}_i^*, \lambda^*\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \frac{\sqrt{\boldsymbol{n}}}{2}\right) \qquad \forall \boldsymbol{i}$$

Usando agora a condição necessária de 2ª ordem, temos:

$$\boldsymbol{y}'\left(\nabla^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \lambda^* \nabla^2 \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{y} \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \left\{ \boldsymbol{z} \,\middle|\, 2\boldsymbol{x}^{*\prime} \boldsymbol{z} = 0 \right\}$$

ou:

$$\boldsymbol{y}'\left(0 + \lambda^* 2\boldsymbol{I}\right)\mathrm{y} \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \left\{ \boldsymbol{z} \,\middle|\, 2\boldsymbol{x}^{*\prime} \boldsymbol{z} = 0 \right\}$$

Esta condição só é satisfeita para $\lambda^* \geq 0$ e portanto o único ponto satisfazendo a 1ª e a 2ª condições necessárias é:

$$\boldsymbol{x}^* = \left[\frac{-1}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \frac{-1}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \ldots, \frac{-1}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right]'.$$

6.

A determinação da área máxima passa por resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\max f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ &\textbf{\textit{s.a.}} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = d^2 \end{aligned}$$

Para já não consideramos as restrições $x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3$ mas tudo estará bem se verificarmos que o máximo global satisfaz àquelas restrições.

Seja a Lagrangeana:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + \lambda\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - d^2\right)$$

As condições necessárias são:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \qquad \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \textbf{(€)}$$

Somando estas equações obtemos:

$$2(x_1 + x_2 + x_3) + 2\lambda(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

Donde $\lambda = -1$ ou $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(i) Para $\lambda = -1$ de **(€)** vem:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é:

$x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{\sqrt{3}d}{3}$ que é uma solução factível para o problema.

(ii) Para $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ de **(€)** vem:

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Temos agora de averiguar qual das duas soluções corresponde ao máximo global.

Para o efeito adicione-se e subtrai-se a $f(x)$ o termo $\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$ e use-se a equação das restrições. Então temos:

$$f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) =$$

$$= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - \frac{1}{2}d^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - \frac{1}{2}d^2$$

Calculando agora o valor da função nas duas soluções resulta que:

- Para $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\sqrt{3}d}{3}$ a função vale $f(x) = d^2$
- Para $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ a função vale $f(x) = -\frac{1}{2}d^2$ o que corresponde a violar as restrições $x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3.$

ENTÃO o máximo global verifica-se para $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\sqrt{3}d}{3}$

A determinação do perímetro máximo passa por resolver o seguinte problema:

$$\max f(x) = x_1 + x_2 + x_3$$
$$s.a. \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = d^2$$

Seja a Lagrangeana:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1 + x_2 + x_3 + \lambda\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - d^2\right)$$

As condições necessárias são:

$$ {}_{x}L\left(x^*,\lambda^*\right) = 0 \qquad {}_{\lambda}L\left(x^*,\lambda^*\right) = 0 $$

$$ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \textbf{(€)} $$

Donde:

$$ x_1 = -\frac{1}{2\lambda}, \quad x_2 = -\frac{1}{2\lambda}, \quad x_3 = -\frac{1}{2\lambda}, $$

Quadrando e somando vem:

$$ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = d^2 = \frac{3}{4\lambda^2} $$

Donde $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2d}$.

(i) Para $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2d}$ vem $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{-d}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}d}{3}$ **(1)**

(ii) Para $\lambda = \frac{-\sqrt{3}}{2d}$ vem $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}d}{3}$ **(2)**

Comparando os valores da função verifdica-se que (2) é um máximo global e (1) é um mínimo global (mas viola as restrições $x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3$ e não corresponde a um paralelipípedo)

7.

Seja o problema com restrições lineares:

$$ \begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{sujeito a } \; Ax = b \end{aligned} $$

onde A é uma matriz (mxn) com característica $k \leq m \leq n$ e b é um vector $mx1$.
Vaomos assumir que $k < m$ e que o problema é factível, o que significa que $\left(\boldsymbol{m-k}\right)$das restrições são redundantes.

Defina-se:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{A}_1 \in \boldsymbol{R}^{kxn} \quad \boldsymbol{A}_2 \in \boldsymbol{R}^{(m-k)xn}$$

de tal modo que $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ corresponde às restrições que não são redundantes.

Então a solução do problema modificado:

$$\begin{aligned} &\min \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ &\text{sujeito a} \ \ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \end{aligned}$$

é a mesma do problema original.

Uma vez que $\boldsymbol{A}_1$ tem característica $\boldsymbol{k}$, qualquer ponto factível é regular e o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange aplica-se. Assim se $\boldsymbol{x}^*$ for um mínimo local, existe λ^* tal que:

$$\nabla \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*\right) + \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{k}} \lambda_{\boldsymbol{i}}^* \nabla \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{i}}\left(\boldsymbol{x}^*\right) = 0$$

Se atribuirmos multiplicadores de lagrange nulos às restrições redundantes, verifica-se a equação:

$$\nabla \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*\right) + \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}} \lambda_{\boldsymbol{i}}^* \nabla \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{i}}\left(\boldsymbol{x}^*\right) = 0$$

e portanto as condições necessárias de 1ª ordem verificam-se para o problema original.

Se $\boldsymbol{f}$ for duplamente diferenciável, teremos para o problema modificado:

$$\boldsymbol{y}' \nabla^2 \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*\right)\boldsymbol{y} \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \left\{ \boldsymbol{y} \,\middle|\, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y} = 0 \right\}$$

Repare-se que por definição $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = 0$ implica $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y} = 0$.

Além disso, uma vez que as linhas de $\boldsymbol{A}_2$ são combinações lineares das linhas de $\boldsymbol{A}_1$, temos que $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y} = 0$ implica $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y} = 0$ e portanto $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = 0$.
Portanto os conjuntos $\left\{\boldsymbol{y} \middle| \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = 0\right\}$ e $\left\{\boldsymbol{y} \middle| \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y} = 0\right\}$ coincidem e as condições necessárias de 2ª ordem também se verificam para o problema original.

ENTÃO QUANDO AS RESTRIÇÕES SÃO LINEARES O TEOREMA DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE APLICA-SE MESMO QUANDO AS HIPÓTESES DE REGULARIUDADE NÃO SE VERIFICAM

NOTA: Dependendo de quais as restrições redundantes que se desprezam, os multiplicadores de lagrange a que se atribuem valores nulos podem ser diferentes e portanto o vector dos multiplicadores de lagrange pode não ser único.