Optimização e Algoritmos
1ºSemestre – 2003/2004
LEEC

Série de Problemas nº 6
Soluções

1.

$$\min \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right)$$

sujeito a:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \qquad i = 1,\ldots, m$$

$$0 \leq x_j \leq \mu_j \qquad j = 1,\ldots,n$$

.

2.

Minimize $\left(-3x_1 - x_2 + x_3^{\,2}\right)$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3^{\,2} = 0$$

(a) Se x^* for um mínimo local, então existem λ^* e μ^* (únicos) tais que:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2x_3^* \end{bmatrix} + \lambda^* \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2x_3^* \end{bmatrix} + \mu^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

(b) Assim $\mu^* \neq 0$, pois se $\mu^* = 0$ obter-se-iam dois valores diferentes para λ^*.

Logo:

$$\begin{cases} -3 - \lambda^* + \mu^* = 0 \\ -1 + 2\lambda^* + \mu^* = 0 \\ 2\boldsymbol{x}_3^* + 2\lambda^* \boldsymbol{x}_3^* + \mu^* = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda^* = -\dfrac{2}{3} \\ \mu^* = \dfrac{7}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{x}_3^* = -\dfrac{7}{2} \\ \boldsymbol{x}_2^* = -\dfrac{35}{12} \\ \boldsymbol{x}_3^* = \dfrac{77}{12} \end{array}$$

3. Não é fornecida resolução para este problema.

4. Não é fornecida resolução para este problema.

5. Considere primeiro o problema:

Minimize $x_1 + x_2$

Sujeito a: $x_1^2 + x_2^2 = 2$

Note que $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} \neq 0$ para todo o $\boldsymbol{x}$ factível. Então qualquer $\boldsymbol{x}$ factível é regular e portanto podemos aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange.

Assim, temos:

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*.\lambda^*) = \boldsymbol{x}_1^* + \boldsymbol{x}_2^* + \lambda^*\left(\boldsymbol{x}_1^{*2} + \boldsymbol{x}_2^{*2} - 2\right)$$

Se $\boldsymbol{x}^*$ for um mínimo local teremos:

$${}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*) = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda^* \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{x}_1^* \\ 2\boldsymbol{x}_2^* \end{bmatrix} = 0$$

e

$${}_{\lambda}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*) = 0 \qquad \boldsymbol{x}_1^{*2} + \boldsymbol{x}_2^{*2} = 2$$

Combinando as duas equações, verificamos que os únicos candidatos possíveis, para mínimo local, são:

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para} \quad \lambda^* = -\frac{1}{2}$$

e

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{para} \quad \lambda^* = \frac{1}{2}$$

Agora, como $\nabla^2_{xx}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*) = 2\lambda^*\boldsymbol{I}$ da condição de 2ª ordem vem que:

$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ não é um mínimo local, e $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é um mínimo local.

Uma vez que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ é contínua no conjunto das restrições que é compacto, existe um mínimo global.

Então $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é o único mínimo global.

Consideremos agora o problema:

Minimize $-(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$

Sujeito a: $x_1^2 + x_2^2 = 2$

Usando um raciocínio idêntico ao usado acima, concluimos que $[1,1]'$ é o único mínimo global deste novo problema ou de modo equivalente é o único máximo global do problema original.