Optimização e Algoritmos (2004/2005)

Instituto Superior Técnico – Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Série de Problemas 1
Programação Linear, Método Simplex

Nota MATLAB (requer a instalação da optimization toolbox): a linha `x = linprog(c,A,b)` resolve programas lineares na forma

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ Ax \leq b & \end{array}$$

Faça `help linprog` para mais opções. Recomenda-se o uso do MATLAB para a resolução numérica dos programas lineares desta série.

Problema 1. [Conversão de programas lineares para formas não-standard] Coloque na forma

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ Ax \leq b & \end{array}$$

os seguintes programas lineares. Em particular, explicite a matriz A e os vectores b e c que obteve para cada alínea. Resolva o programa linear numericamente (use MATLAB). Indique a solução óptima (x_1^*, x_2^*, x_3^*) para cada alínea.

(a)

$$\begin{array}{rl} \min & 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 & \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2 & \\ |x_3| \leq 1 & \\ x_2 = -3 & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rl} \max & 3x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 & \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -1 & \\ x_2 + |x_3| \leq 2 & \\ x_2 \geq -3 & \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rl} \min & x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \leq 5 & \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2 & \\ |x_2| + |x_3| \leq 1 & \end{array}$$

[**Pista:** para lidar com a desigualdade $|x_2| + |x_3| \leq 1$ desenhe-a no plano x_2–x_3 e observe que pode ser desdobrada em 4 desigualdades, ou, alternativamente, analise o problema 3 (a).]

Problema 2. [Técnica do epigrafo] Mostre que os programas de optimização

$$\text{P1:} \quad \min_{x \in X} \quad f(x) \qquad \text{e} \qquad \text{P2:} \quad \min_{\substack{f(x) \leq t \\ x \in X}} \quad t \ ,$$

são equivalentes. Isto é, mostre que o mínimo dos dois programas de optimização são iguais (repare que P2 tem mais uma variável a optimizar). [Note a conclusão: qualquer problema de optimização é equivalente a outro com objectivo linear.]

Problema 3.[Conversão de programas lineares] Neste problema, são ilustradas algumas técnicas de conversão de programas lineares. O seu trabalho consiste em justificar a validade dos 2 passos efectuados (ou seja, mostre que cada passo efectuado não altera o mínimo dos problemas de optimização envolvidos).

(a)

$$\min_{\substack{x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2 \\ |x_3| \leq 1 \\ x_2 \geq -3}} \quad |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

$$\overset{\text{Passo 1}}{\equiv} \quad \min_{\substack{x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2 \\ |x_3| \leq 1 \\ x_2 \geq -3 \\ |x_1| = s_1 \\ |x_2| = s_2 \\ |x_3| = s_3}} \quad s_1 + s_2 + s_3$$

$$\overset{\text{Passo 2}}{\equiv} \quad \min_{\substack{x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2 \\ |x_3| \leq 1 \\ x_2 \geq -3 \\ |x_1| \leq s_1 \\ |x_2| \leq s_2 \\ |x_3| \leq s_3}} \quad s_1 + s_2 + s_3$$

(b)

$$\begin{array}{rl} \min & \max\{4x_1+x_3, x_1-2x_2+5x_3, x_2-2x_3\} \\ x_1+x_2 \leq 5 & \\ x_1-2x_2-x_3 \geq -2 & \\ |x_3| \leq 1 & \\ x_2 \geq -3 & \end{array}$$

$$\overset{\text{Passo 1}}{\equiv} \quad \begin{array}{rl} \min & t \\ \max\{4x_1+x_3, x_1-2x_2+5x_3, x_2-2x_3\} \leq t & \\ x_1+x_2 \leq 5 & \\ x_1-2x_2-x_3 \geq -2 & \\ |x_3| \leq 1 & \\ x_2 \geq -3 & \end{array}$$

$$\overset{\text{Passo 2}}{\equiv} \quad \begin{array}{rl} \min & t \\ 4x_1+x_3 \leq t & \\ x_1-2x_2+5x_3 \leq t & \\ x_2-2x_3 \leq t & \\ x_1+x_2 \leq 5 & \\ x_1-2x_2-x_3 \geq -2 & \\ |x_3| \leq 1 & \\ x_2 \geq -3 & \end{array}$$

Problema 4. [Conversão de programas lineares para a forma standard] Coloque na forma standard

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ Ax = b & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

os programas lineares do problema 1, partindo da forma como estão formulados (ou seja, não parta da formulação $\min_{Ax \leq b} c^T x$ que já obteve na resolução do problema 1). Indique explicitamente qual a matriz A e os vectores b e c que correspondem a cada alínea.

Problema 5. [Formulação de problemas de optimização como programas lineares] O objectivo deste problema é formular alguns problemas de optimização como programas lineares (não necessita de os colocar na forma standard).

(a) [Aproximação geométrica] Pretende-se inscrever uma bola B, com o maior diâmetro possível, num poliedro $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. A bola B é parameterizada pelo seu centro $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ e pelo seu raio R, ou seja,

$$B = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x_1-c_1)^2 + (x_2-c_2)^2 \leq R^2\right\}.$$

O poliedro $\mathcal{P}$ é representado por um sistema de M desigualdades

$$\mathcal{P} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq b \right\},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}.$$

As constantes A e b são dadas. O seu objectivo é determinar c_1, c_2 e R.

Formule este problema de optimização como um programa linear. **Sugestão:** comece por demonstrar que uma bola de centro (c_1, c_2) e raio R está incluída num semi-espaço $\mathcal{S}_m = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \leq b_m \right\}$ se e só se

$$a_{m,1}c_1 + a_{m,2}c_2 + R\sqrt{a_{m,1}^2 + a_{m,2}^2} \leq b_m,$$

e depois observe que $B \subset \mathcal{P}$ equivale a $B \subset \bigcap_{m=1}^{M} \mathcal{S}_m$.

Use a formulação obtida para resolver o caso

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 5 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ 18 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e confirme a solução apresentada na figura 1.

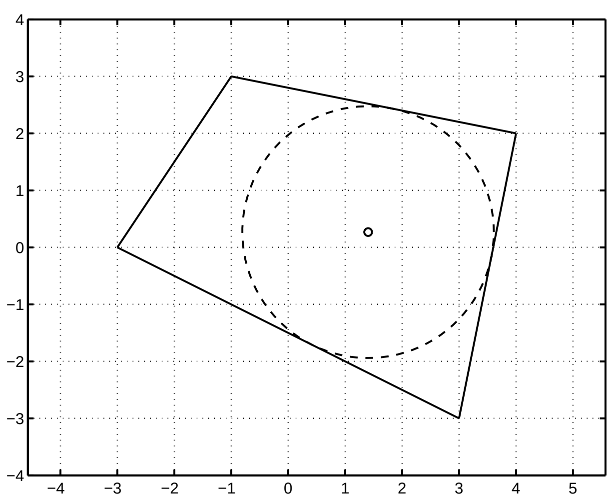

Figura 1: Solução do problema 4 (a)

(b) [Comunicações] O sinal $s[n]$ é gerado num transmissor e, após passagem por um canal com função de transferência $H(z)$, é observado num receptor como o sinal $x[n]$, ver figura 2. Para simplificar, assume-se que todos os sinais assumem valores em $\mathbb{R}$. A resposta impulsiva do canal $H(z)$

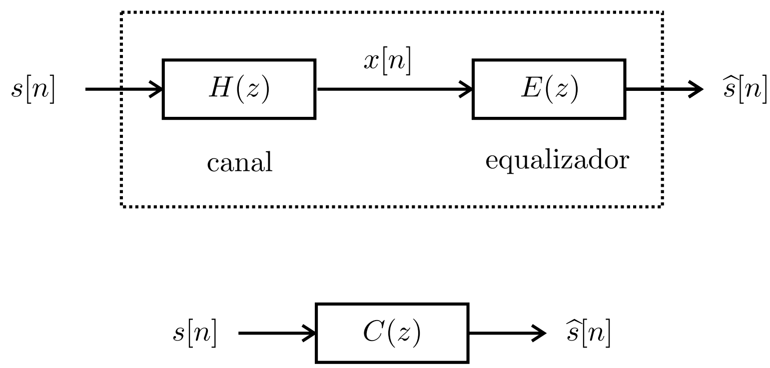

Figura 2: O objectivo é desenhar o equalizador para que $C(z) \simeq z^{-d}$

tem duração finita, isto é,

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \cdots + h[N]z^{-N}.$$

O canal $H(z)$ introduz inteferência inter-simbólica no sinal $s[n]$. Essa distorção dificulta ao receptor a detecção dos símbolos de informação contidos em $s[n]$. Por exemplo, observe o sinal binário $s[n]$ na figura 3 (são exibidas 1000 amostras consecutivas). Note que $s[n]$ só assume os valores ± 1. Considere agora um canal dado por $H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}$. Na figura 4 mostra-se o sinal $x[n]$ observado no receptor e que resulta da passagem de $s[n]$ pelo canal $H(z)$. É notória a destruição da constelação binária original. Neste problema, assume-se que o canal $H(z)$ é conhecido pelo receptor. Para reverter o efeito do canal $H(z)$, considere o processamento de $x[n]$ pelo filtro $E(z)$ como se mostra na figura 2. O papel do filtro $E(z)$, também chamado de equalizador, é "inverter"o canal $H(z)$ de modo a recuperar o sinal de informação $s[n]$. A resposta impulsiva do equalizador também tem duração finita, isto é,

$$E(z) = e[0] + e[1]z^{-1} + e[2]z^{-2} + \cdots + e[M]z^{-M},$$

onde M é escolhido pelo receptor. Pretende-se desenhar $E(z)$ de tal modo que o filtro global $C(z) = H(z)E(z)$ não tenha interferência intersimbólica, ou seja, $C(z) \simeq z^{-d}$, onde d designa um inteiro positivo escolhido pelo receptor (a acção de $C(z)$ sobre $s[n]$ limitar-se-ia então a um inofensivo atraso temporal). Mais especificamente, seja

$$C(z) = c[0] + c[1]z^{-1} + c[2]z^{-2} + \cdots + c[N+M]z^{-(N+M)}.$$

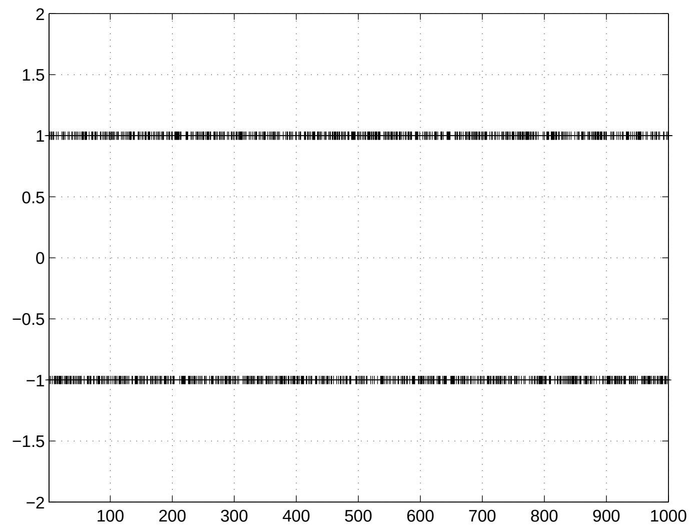

Figura 3: Sinal binário $s[n]$ gerado no transmissor

Pretende-se desenhar $E(z)$, ou seja, os coeficientes $\{e[0], e[1], e[2], \ldots, e[M]\}$, de forma a minimizar

$$\left\| \begin{bmatrix} c[0] \\ c[1] \\ \vdots \\ c[d-1] \\ c[d] \\ c[d+1] \\ \vdots \\ c[N+M] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty ,$$

onde $\|(a_1, a_2, \ldots, a_K)\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_K|\}$. Formule o desenho do equalizador como um programa linear.

Use a formulação obtida para resolver o caso $H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}$, $M = 20$, $d = 10$. Confirme que, depois de obter o equalizador, a resposta impulsiva do filtro resultante $C(z)$ corresponde à figura 5. A título ilustrativo, mostra-se na figura 6 o sinal $\widehat{s}[n]$ da figura 2. É notória a recuperação (aproximada) da constelação binária em $s[n]$, após um transiente inicial.

Problema 6.[Simplex] Considere o programa linear

$$\begin{array}{lcc} P: & \min & -2x_1 - x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 4 & \\ & x_1 \leq 8 & \\ & x_1 + x_2 \leq 10 & \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

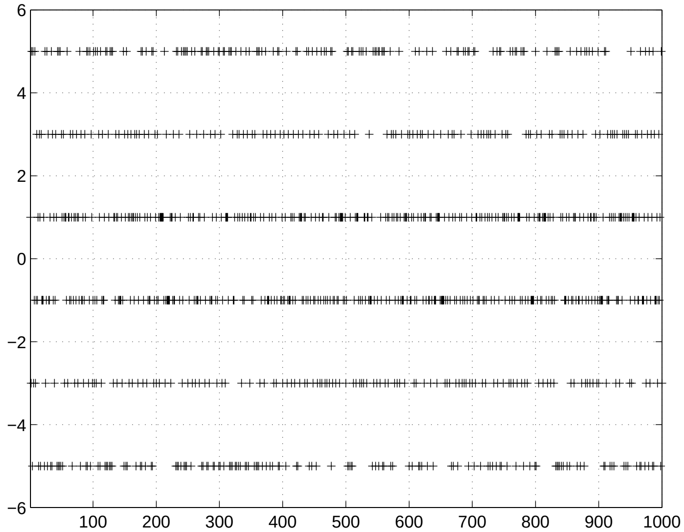

Figura 4: Sinal $x[n]$ observado no receptor

(a) Faça uma representação gráfica de P e use-a para encontrar a solução óptima.

(b) Resolva P através do simplex e confirme o resultado obtido em (a). Indique ainda, na representação gráfica de (a), qual a sequência de vértices visitados pelo simplex.

(c) Repita as alíneas (a) e (b) para o programa linear

$$
\begin{array}{rcc}
P: & \min & -x_1 - 2x_2 \\
 & -2x_1 + x_2 \leq 4 & \\
 & x_1 \leq 8 & \\
 & x_1 + x_2 \leq 10 & \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Problema 7.[Geometria de poliedros] Considere o poliedro

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax \leq b\},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \qquad a_i \in \mathbb{R}^n, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

(a) Mostre que, se $\mathsf{rank}\, A < m$, então o poliedro não é limitado.

(b) Suponha que $z \in \mathcal{P}$. Seja k o número de restrições activas em z, isto é, seja k ($k \in \{0, 1, \ldots, m\}$) o número de inequações do sistema $Az \leq b$ que

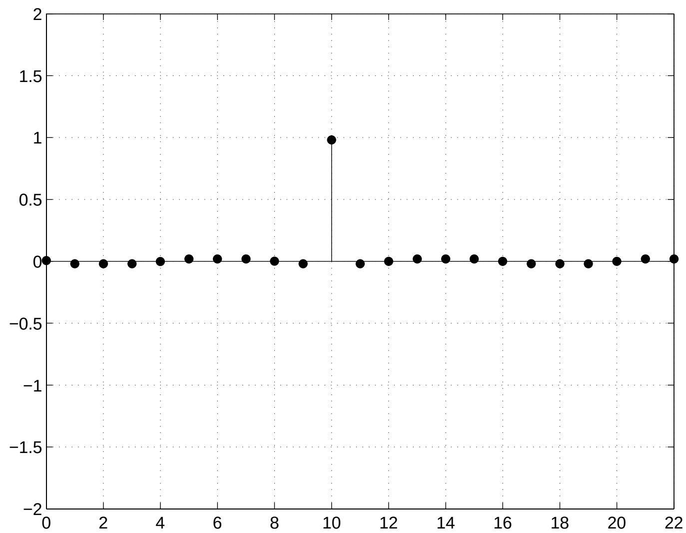

Figura 5: Resposta impulsiva do filtro $C(z)$ após optimização

se verificam com igualdade. Seja $A_0 \in \mathbb{R}^{k \times m}$ a submatriz de A que contém as linhas i para as quais $a_i^T z = b_i$ (submatriz que corresponde às restrições activas). Mostre que z é um vértice de $\mathcal{P}$ se e só se $\mathsf{rank}\, A_0 = m$.

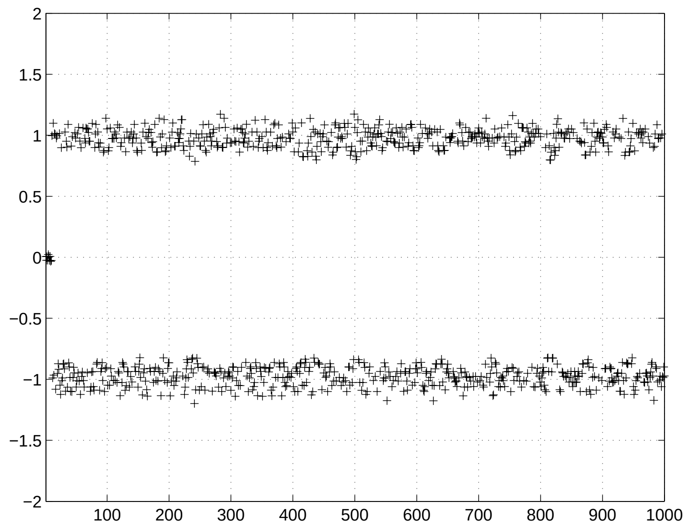

Figura 6: Sinal $\widehat{s}[n]$ (após equalizador)