

Instituto Superior Técnico  
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

# Controlo

*2006/2007*

Controlo digital de velocidade e de posição de um motor D.C.

Elaborado por *E. Morgado*<sup>1</sup> e *F. M. Garcia*<sup>2</sup>

Reformulado por *E. Morgado*<sup>1</sup> e *J. Gaspar*<sup>2</sup>

Novembro de 2006

---

<sup>1</sup>Centro de Física Molecular/Instituto Superior Técnico

<sup>2</sup>Instituto de Sistemas e Robótica/Instituto Superior Técnico

## I – Notas preliminares

O relatório do trabalho deve ser entregue na caixa de correio da Secção de Sistemas e Controlo (Torre Norte, 5º piso, em frente à sala 5.17) no prazo de sete dias a partir da correspondente sessão de Laboratório. Entregas fora do prazo serão penalizadas.

## II – Objectivos

- Identificação de um sistema real.
- Equivalente discreto de um sistema controlado por computador.
- Controlo digital.
- Localização dos pólos no plano  $z$  e estabilidade.
- Efeitos da variação do intervalo de amostragem.

## III – Introdução

O laboratório dispõe do seguinte equipamento:

- Motor de corrente contínua (DC) com taquímetro acoplado.
- Montagem que inclui um amplificador de potência.
- Placas de conversão A/D e D/A, ligadas a um PC.
- O PC tem instalado um software que permite
  1. gerar sinais de referência do tipo escalão;
  2. a leitura e escrita de/para uma placa AD/DA;
  3. o cálculo de sinais de controlo definidos por equações às diferenças lineares de coeficientes constantes, a partir de um sinal de erro entre a referência e a saída do sistema lida pela placa AD/DA.

Este equipamento permite a montagem, análise e projecto do sistema de **controlo digital de velocidade ou de posição** de um motor DC. Comparando o controlo digital do motor DC com o controlo analógico de velocidade, notar que se mantém o sistema *amplificador de potência + motor DC + taquímetro* e se substitui o controlador baseado em amplificadores operacionais por um programa de computador.

## IV – Preparação teórica a realizar antes da sessão de laboratório

Esta secção aborda o problema teórico da discretização, retroacção e controlo digital do sistema representado na Figura 1.



Figura 1: Motor e amplificador de potência a utilizar no laboratório.

1) (**Controlo de VELOCIDADE - Modelo Equivalente Discreto do Motor**) Supondo, em boa aproximação, que o sistema constituído pelo Amplificador de potência, Motor e Taquímetro (AMT) é representado por uma função de transferência de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{K_0}{1 + s\tau}, \quad (1)$$

determine a função de transferência  $G(z)$  do equivalente discreto do sistema (AMT) precedido de um zero-order hold (ZOH), de acordo com a Figura 2. Apresente  $G(z)$  em função de  $K_0$ ,  $\tau$  e do intervalo de amostragem  $T$ . Indique, justificando, em que condições o sistema equivalente discreto do sistema AMT é estável.

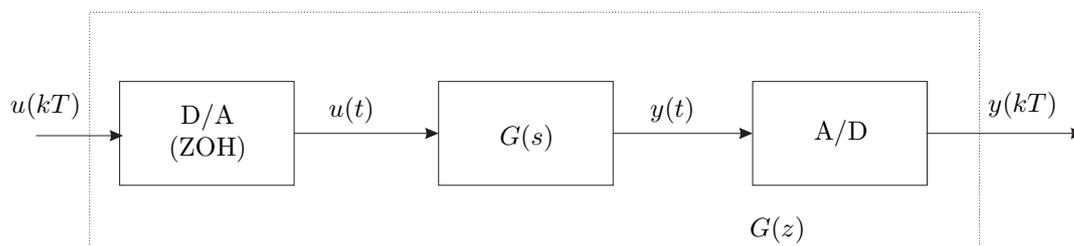


Figura 2: Equivalente discreto do sistema AMT.

2) (**Controlador Proporcional**) Considere o sistema de controlo digital apresentado na Figura 3. Note que o tempo de cálculo pelo computador mais o tempo de conversão do sinal de controlo pode ser significativo, em comparação com o intervalo de amostragem. Por esta razão, o programa introduz um atraso unitário equivalente a um período de amostragem. Nestas condições, o diagrama de blocos em cadeia fechada do sistema equivalente discreto é apresentado na Figura 4, em que  $G(z)$  é a função de transferência calculada na alínea 1).

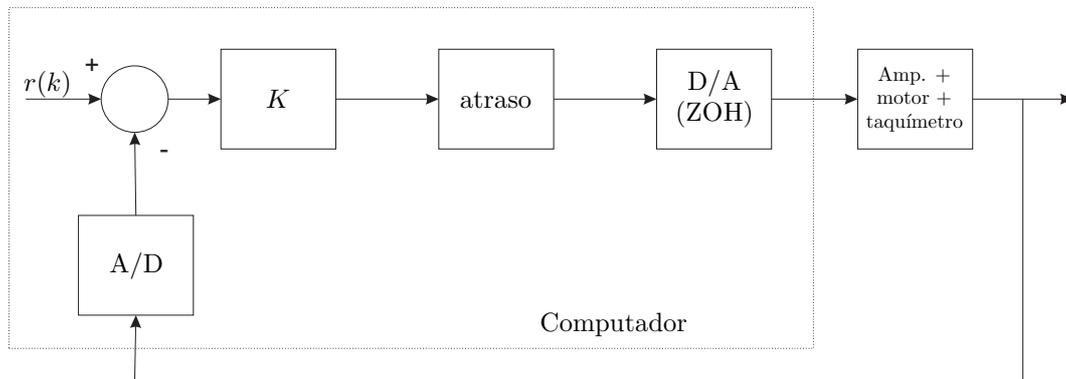


Figura 3: Sistema de controlo digital de velocidade (controlador proporcional).

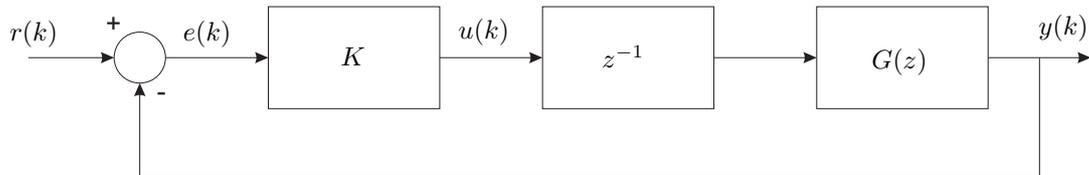


Figura 4: Equivalente discreto em malha fechada do sistema AMT realimentado.

2a) Determine a função de transferência em malha fechada  $Y(z)/R(z)$  do sistema discreto equivalente apresentado na Figura 4. Calcule o valor do ganho  $K = K_1$  (como função de  $K_0$ ,  $\tau$  e  $T$ ) para que o sistema em malha fechada tenha pólos duplos e calcule a respectiva localização dos pólos. Calcule ainda o valor dos pólos para  $K = K_1/2$ ,  $K = 2K_1$  e  $K = 4K_1$ .

2b) Considerando que o período de amostragem,  $T$  pode ser programado para valores entre  $\tau$  e  $\tau/40$ , esboce o root-locus da malha fechada  $Y(z)/R(z)$  em função do ganho  $KK_0$ , para os dois valores extremos de  $T$ . Compare as gamas de  $K > 0$  tais que o sistema em malha fechada é estável.

3) **(Controlador Proporcional Integral - Projecto Directo)** Pretende-se agora que a resposta  $y(t)$  a um escalão unitário na entrada de referência cumpra as seguintes especificações **em tempo contínuo**:

- Sobreelevação  $S(\%) = 20\%$ .
- Tempo de estabelecimento (a 5%)  $t_s = 20 \text{ ms}$ .

3a) Determine os pólos complexos **no plano s** correspondentes às especificações apresentadas mais acima.

3b) Determine os pólos complexos equivalentes **no plano z** através da relação  $z = \exp(sT)$  (considere  $T = 2.5 \text{ ms}$ ).

3c) Para cumprir os objectivos propostos, em vez do controlador proporcional  $K$  da Figura 4, usa-se agora um controlador Proporcional-Integral (PI), implementado em tempo dis-

creto pelo computador através da seguinte equação às diferenças:

$$u(k) = u(k-1) + (K_p + K_i)e(k) - K_p e(k-1) \quad (2)$$

Determine a função de transferência  $U(z)/E(z)$  do controlador.

3d) No laboratório utilizará um programa em que o controlador é representado por uma função de transferência da forma

$$C(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (3)$$

Calcule os parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  em função de  $K_p$  e  $K_i$ .

3e) Mostre que a função de transferência do sistema discreto equivalente em cadeia fechada é dada por:

$$G_{PI}(z) = \frac{zK_2(K_p + K_i) - K_2K_p}{z^3 - (1+a)z^2 + (a + K_2K_p + K_2K_i)z - K_2K_p}, \quad (4)$$

em que  $a = \exp(-T/\tau)$  e  $K_2 = K_0(1 - \exp(-T/\tau))$ .

3f) Admita que o sistema em cadeia fechada tem dois pólos complexos conjugados dominantes localizados no plano  $z$  de forma a serem cumpridas as especificações referidas mais acima. Calcule, em função desses mesmos pólos e dos valores de  $K_2$  e  $a$ , os valores de  $K_p$ ,  $K_i$ , e do terceiro pólo (real) e do zero do sistema em cadeia fechada.

4) (**Controlo de POSIÇÃO - Projecto por Emulação**) Para controlo de posição é utilizado um potenciómetro no lugar do taquímetro. O modelo do sistema Amplificador de potência, Motor e Potenciómetro (AMP) é representado por uma função de segunda ordem:

$$G_2(s) = \frac{K_3}{s(1+s\tau)}. \quad (5)$$

Note que em comparação com a equação (1), existe um pólo adicional (na origem) e a constante de tempo  $\tau$  mantém-se mas o ganho  $K_3$  é diferente de  $K_0$ .

4a) Mostre que  $K_3$  é a derivada em regime estacionário da resposta de  $G_2(s)$  ao escalão.

4b) Considere o controlador:

$$C(s) = \lambda \frac{1+s\alpha}{1+s\beta} \quad (6)$$

Determine expressões para  $\lambda$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  de modo a cancelar o pólo em  $-1/\tau$  do sistema AMP e a cumprir as seguintes especificações:

- Sobrelevação  $S(\%) = 20\%$ .
- Tempo de estabelecimento (a 5%)  $t_s = 100 \text{ ms}$ .

4c) Determine a largura de banda a -3dB do sistema de segunda ordem definido pelos pólos calculados na alínea anterior. Confirme o resultado com o comando bandwidth do Matlab. Indique um período de amostragem adequado para a realização do projecto por

emulação.

4d) Determine a expressão do controlador digital,  $C(z)$  equivalente a  $C(s)$ , por aplicação da transformação bilinear. Utilize o período de amostragem determinado na alínea anterior.

4e) Verifique que o equivalente discreto,  $G_2(z)$  do AMP precedido de um ZOH é o seguinte:

$$G_2(z) = K_3 \frac{(T - \tau + \tau e^{-T/\tau})z + (\tau - (T + \tau)e^{-T/\tau})}{(z - 1)(z - e^{-T/\tau})}. \quad (7)$$

4f) (*Simulação*) Compare a resposta ao escalão dos sistemas em malha fechada em tempo contínuo e tempo discreto. Tenha em conta que, tipicamente, os parâmetros do motor podem tomar valores nos seguintes intervalos:  $K_3 \in [1; 3]$  e  $\tau \in [15ms; 25ms]$ . Comandos úteis em MATLAB: `tf`, `c2d`, `feedback` e `step`. Em particular o comando `c2d` permite confirmar os resultados obtidos pela expressão derivada em 4d e pela equação (7):

```
>> Cz= c2d(C,T,'tustin'), G2z= c2d(G2,T,'zoh')
```

## V – Trabalho a realizar durante a sessão de laboratório

1) **Controlo de VELOCIDADE: Identificação do sistema AMT** - Observe a resposta do sistema (amplificador de potência + motor + taquímetro) a um escalão unitário (gerado pelo computador). Determine experimentalmente os parâmetros da função de transferência em tempo contínuo  $G(s)$ . Calcule os parâmetros da função de transferência discreta equivalente  $G(z)$  para o período de amostragem  $T = 2.5 ms$ .

2) **Efeito da variação do ganho K** - Escolha o intervalo de amostragem  $T = 2.5 ms$ . Observe e esboce a resposta ao escalão com amplitude  $0.5V$  do sistema em cadeia fechada com o controlador proporcional (Figura 3) para  $K \in \{K_1/2; K_1; 2K_1; 4K_1\}$ . A partir dos cálculos efectuados na pergunta 2) da parte teórica, represente o mapa de pólos-zeros do sistema em cadeia fechada para aqueles valores de ganho. Comente os resultados.

3) **Efeito da variação do período de amostragem T** - Para  $K = K_1$ , observe e esboce a resposta ao escalão com amplitude  $0.5V$  fazendo variar o intervalo de amostragem  $T$  no intervalo  $\{2; 3; 4; 10\} ms$ . Calcule a localização dos pólos e represente o mapa de pólos-zeros para as várias situações testadas. Comente os resultados.

4) **Projecto do controlador digital PI (Projecto directo)** - Considere de novo  $T = 2.5 ms$ . Calcule os valores de  $K_i$  e  $K_p$  de forma a que sejam cumpridas as especificações exigidas na pergunta 3) da parte teórica. Implemente, com os valores de  $K_p$  e  $K_i$  obtidos, o controlo digital de velocidade com o controlador proporcional-integral.

1. Observe e esboce a resposta ao escalão com amplitude  $0.5V$  e compare os resultados obtidos com os esperados. Comente.
2. *Resposta em frequência* - Aplique no sinal de referência uma onda sinusoidal de amplitude unitária fazendo variar a frequência no intervalo  $\{1; 50; 399\} Hz$ . Observe os valores máximos do sinal de saída. Comente.

5) **Controlo de POSIÇÃO: Identificação do sistema AMP** - Observe a resposta do sistema (amplificador de potência + motor + potenciómetro) a um escalão unitário (gerado pelo computador). Determine experimentalmente o parâmetro  $K_3$  da função de transferência em tempo contínuo  $G_2(s)$ . Calcule os parâmetros da função de transferência discreta equivalente,  $G_2(z)$  para o período de amostragem determinado em IV.4c.

6) **Projecto por emulação** - Utilizando as expressões derivadas em IV.4 calcule o controlador digital  $C(z)$  que emula o controlador contínuo desenhado para cumprir as especificações indicadas na mesma alínea. Observe as respostas ao escalão com amplitude 0.1V. Verifique que quando o período de amostragem aumenta, relativamente ao determinado em IV.4c, existe uma degradação do desempenho e o sistema pode ser instabilizado. Comente esta observação com base num diagrama root-locus em função do parâmetro  $T$ .

Sugestão MATLAB: para visualizar os pólos da malha fechada, actualizando a representação discreta do motor,  $G_2(z)$ , para um novo período de amostragem,  $T$ , mantendo os parâmetros (pólos, zeros e ganho) do controlador,  $C(z)$ :

```
>> G2z= c2d(G2s,T,'zoh'); set(Cz,'Ts',T); pzmap(feedback(Cz*G2z,1));
```

Notar que a instrução `set` é um artifício necessário para o MATLAB realizar o produto das funções de transferência  $C(z).G_2(z)$ .

7) **Ajuste de parâmetros/outras especificações** - Determine novos valores dos parâmetros do controlador da equação (3) de forma a

1. melhorar a resposta com os controladores face às especificações desejadas
2. obter outras especificações que são deixadas ao seu critério (pode apoiar-se em simulações realizadas com o MATLAB).

Implemente os controladores assim obtidos, observe a resposta ao escalão e comente os resultados.