NOTAS DISPERSAS SOBRE FILTRAGEM DE KALMAN

Maria Isabel L. F. Ribeiro
Professora Auxiliar
Instituto Superior Técnico

Centro de Análise e Processamento de Sinais
Junho de 1989

Contents

Nota Introdutória

Estas notas foram elaboradas como apoio a algumas aulas da cadeira de Modelação e Identificação de Sistemas Lineares leccionada no Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores e o seu objectivo é permitir ao leitor um primeiro contacto com técnicas de filtragem, nomeadamente com o filtro de Kalman-Bucy.

Elas não apresentam nem tratam do problema de forma exaustiva, pelo que não dispensam a consulta da vasta bibliografia publicada sobre este assunto, alguma da qual é referenciada.

1 Introdução ao Problema

Nestas notas introduzem-se os problemas da filtragem e predição lineares, deriva-se a dinâmica do Filtro de Kalman-Bucy e interpretam-se as grandezas que intervêm na dinâmica do filtro.

O problema da estimação do estado de um Sistema Linear estocástico é tratado como um problema de estimação de um vector de parâmetros aleatórios. Este último problema é inicialmente abordado com generalidade, sendo o filtro de Kalman Bucy derivado como uma sua particularização.

Finalmente discute-se o Filtro de Kalman Bucy Extendido.

Formulação do problema

Considere-se o sistema dinâmico, linear, estocástico, variável no tempo, dado por

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G w_k \qquad k \geq 0 \tag{1}$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \tag{2}$$

em que $\{w_k\}$ e $\{v_k\}$ são sequências **brancas**, de média nula,

$$E[w_k] = E[v_k] = 0 \tag{3}$$

e matriz de variância conjunta

$$E\left[\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} (w_k^T v_k^T)\right] = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}. \tag{4}$$

O estado inicial, x_0, é um vector aleatório com média

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \tag{5}$$

e matriz de covariância

$$E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = \Sigma_0. \tag{6}$$

A sequência $\{u_k\}$ é um sinal determinístico.

O problema da Estimação de estado, coloca-se do seguinte modo: dado o conjunto de observações

$$Y_0^k = [y_0 \ \ , y_1 \ \ \ldots \ \ y_k \ ]$$

pretende-se determinar a estimativa do vector de estado no instante j, $x(j)$, que minimiza o erro quadrático médio de estimação. É usual designar esta estimativa por $\hat{x}(j|k)$.

A relação entre j e k define três problemas distintos, esquematizados na Figura 1.

De acordo com a figura, a relação entre j e k na estimativa $\hat{x}(j|k)$ conduz a designações distintas que em seguida se sumarizam:

$\hat{x}(j|k)$, $j < k$ - <u>Smoothing</u> (não tratado nestas notas)
$\hat{x}(j|k)$, $j = k$ - <u>Filtragem</u>

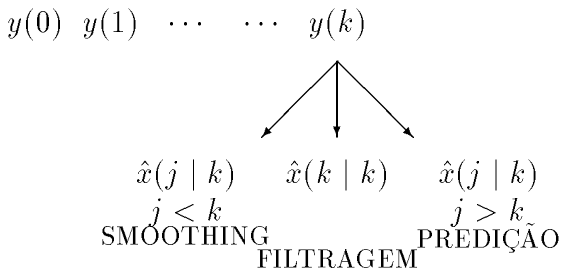

Figure 1: Problemas distintos em estimação de estado

$\hat{x}(j|k), \ \ j > k$ - Predição

O caso particular em que $j = k + 1$ é conhecido como predição a um passo.

2 Estimação de Parâmetros Aleatórios. Resultados Gerais

Nesta secção apresentam-se resultados gerais sobre estimação de um vector aleatório a partir de um conjunto de observações. O filtro de Kalman é derivado neste contexto, interpretando-se o vector de estado como um vector de parâmetros aleatórios que se pretende estimar. Sugere-se [2, 6] para uma leitura aprofundada sobre este assunto.

Seja

$$\theta \in R^n \tag{7}$$

um vector de parâmetros aleatórios, sobre o qual a informação disponível é dada por um conjunto finito de observações

$$Y_1^k = [y(k), \ y(k-1), \ldots, \ y(1)] \tag{8}$$

e em que não se assume nenhuma estrutura para a dependência entre $y(i)$ e θ.

Designem-se por

$$p(\theta, Y_1^k), \ \ p(\theta|Y_1^k) \ \text{ e } \ p(Y_1^k)$$

a função densidade de probabilidade conjunta de θ e Y_1^k, a f.d.p. condicional de θ dado Y_1^k, e a f.d.p. de Y_1^k, respectivamente.

2.1 Formulação do problema

O problema da estimação do vector de parametros θ pode colocar-se do seguinte modo: dadas as observações $y(1), y(2), ..., y(k)$, pretende-se determinar um estimador de θ, i.e.,

$$\hat{\theta}(k) = f[y(i), \ \ i = 1, ..., k] \tag{9}$$

tal que o erro quadrático médio

$$J[\tilde{\theta}(k)] = E[\tilde{\theta}(k)^T \ \tilde{\theta}(k)] \tag{10}$$

seja minimizado.

Em (10), considera-se que $\tilde{\theta}(k)$ é o erro de estimação dado por

$$\tilde{\theta}(k) \triangleq \theta - \hat{\theta}(k). \tag{11}$$

De acordo com o problema acima formulado, a estimativa $\hat{\theta}(k)$ é tal que

$$\hat{\theta}(k) = \text{argmin} E[(\theta - \hat{\theta}(k))^T (\theta - \hat{\theta}(k)]. \tag{12}$$

Mostramos em seguida que minimizar $E[\tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k)]$ em relação a $\hat{\theta}(k)$ é equivalente a minimizar o valor médio condicional $E[\tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k)|Y_1^k]$ em ordem a $\hat{\theta}(k)$.

De facto, pela definição de operador valor médio

$$E[\tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k) p(\theta, Y_1^k) d\theta dY_1^k \tag{13}$$

em que $d\theta = d\theta_1 d\theta_2 ... d\theta_n$ e $dY_1^k = dy_1 dy_2 ... dy_k$. Usando o resultado dado pela lei de Bayes, (veja p.e., [5])

$$p(\theta, Y_1^k) = p(\theta|Y_1^k) p(Y_1^k) \tag{14}$$

em (13) obtém-se:

$$E[\tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k) p(\theta|Y_1^k) d\theta \right] p(Y_1^k) dY_1^k$$

ou ainda, interpretando o significado do integral entre parentesis rectos,

$$E[\tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[\tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k)|Y_1^k] p(Y_1^k) dY_1^k.$$

Assim, minimizar em ordem a $\hat{\theta}(k)$ o valor médio no primeiro membro da expressão anterior é equivalente a minimizar, em ordem ao mesmo vector, o valor médio no segundo membro. Deste modo, o problema da estimação do vector de parâmetros pode ser reformulado.

2.2 Reformulação do problema

Dadas as observações $y(1), y(2), ..., y(k)$, determinar um estimador de θ que minimize o erro quadrático médio condicional, i.e.,

$$\hat{\theta}(k) = \text{argmin} E[\tilde{\theta}(k)^T \tilde{\theta}(k)|Y_1^k]. \tag{15}$$

Resultado 1: O estimador que minimiza o erro quadrático médio é a média condicional, [2, 6],

$$\hat{\theta}(k) = E[\theta|Y_1^k] \tag{16}$$

Demonstração:

Atendendo à definição do erro de estimação em (11), a funcional (15) pode escrever-se como

$$J = E[(\theta - \hat{\theta}(k))^T(\theta - \hat{\theta}(k))|Y_1^k] \tag{17}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} J &= E[\theta^T\theta - \theta^T\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k)^T\theta + \hat{\theta}(k)^T\hat{\theta}(k)|Y_1^k] && (18)\\ &= E[\theta^T\theta|Y_1^k] - E[\theta^T|Y_1^k]\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k)^T E[\theta|Y_1^k] + E[\hat{\theta}(k)^T\hat{\theta}(k)|Y_1^k] && (19)\end{aligned}$$

A última igualdade é consequência do facto de, por definição (ver (9)), $\theta(k)$ ser uma função de Y_1^k pelo que

$$E[\hat{\theta}(k)|Y_1^k] = \hat{\theta}(k).$$

Somando e subtraindo à igualdade anterior a quantidade $E[\theta^T|Y_1^k]E[\theta|Y_1^k]$, obtém-se

$$J = E[\theta^T\theta|Y_1^k] - E[\theta^T|Y_1^k]E[\theta|Y_1^k] + [\hat{\theta}(k) - E[\theta|Y_1^k]]^T[\hat{\theta}(k) - E[\theta|Y_1^k]]$$

em que as duas primeiras parcelas no segundo membro são independentes de $\hat{\theta}(k)$. Notando que a dependência de J em $\hat{\theta}(k)$ é traduzida num termo quadrático, é imediato que J é mínimo quando o termo quadrático é nulo. É assim imediato que

$$\hat{\theta}(k) = E[\theta|Y_1^k]$$

o que conclui a demonstração.

□

Corolário 1: Admita-se que $f[Y_1^k]$ é uma função qualquer das observações Y_1^k. Então o erro de estimação é ortogonal a $f[Y_1^k]$, no sentido em que

$$E[(\theta - \hat{\theta}(k))f^T[Y_1^k]] = 0. \tag{20}$$

Demonstração: Para esta demonstração usa-se o seguinte resultado relativo a v. aleatórias conjuntamente distribuídas. Sejam x e y v.a. conjuntamente distribuidas e $g(y)$ uma função de y. Sabe-se que [5]

$$E[xg(y)] = E\left[E(x|y)g(y)\right] \tag{21}$$

em que o valor médio "exterior" no segundo membro é definido em ordem à v. aleatória y. Aplicando este resultado ao primeiro membro de (20) obtém-se

$$E[\tilde{\theta}(k)f^T(Y_1^k)] = E[E(\tilde{\theta}(k)|Y_1^k)f^T(Y_1^k)]. \tag{22}$$

Calculando o valor médio no interior dos parentesis rectos em (22) obtém-se

$$E[\tilde{\theta}(k)|Y_1^k] = E[\theta|Y_1^k] - \hat{\theta}(k) \tag{23}$$

uma vez que, dado Y_1^k, $\hat{\theta}(k)$ é conhecido. Deste modo, é imediato que (23) é nulo, de onde resulta (20).

□

Como caso particular do corolário tem-se que

$$E[\tilde{\theta}(k)\hat{\theta}^T(k)] = 0. \tag{24}$$

2.3 Particularizações

O Resultado 1 não particulariza a f.d.p. conjunta de θ e Y_1^k, pelo que o resultado é válido para todas as distribuições conjuntas.

É conhecimento latente da comunidade científica que estuda/trata dos problemas da estimação, predição e filtragem que muitos resultados se simplificam quando se consideram f.d.p. Gaussianas. O objectivo deste ponto é esclarecer as implicações de se particularizar o Resultado 1 para esse tipo de f.d.p..

Sugere-se agora ao leitor que dê uma leitura rápida pelo apêndice 1.

Resultado 2: Se θ e Y_1^k forem conjuntamente Gaussianos, então,

$$E[\theta|Y_1^k] = E[\theta] + R_{\theta Y_1^k} R_{Y_1^k}^{-1} [Y_1^k - E[Y_1^k]], \tag{25}$$

em que

$$\begin{aligned} R_{\theta Y_1^k} &= E[(\theta - E(\theta))(Y_1^k - E(Y_1^k)^T], & (26) \\ R_{Y_1^k Y_1^k} &= E[(Y_1^k - E(Y_1^k))(Y_1^k - E(Y_1^k)^T]. & (27) \end{aligned}$$

□

O resultado anterior é muito importante. Ele traduz que, quando θ e Y_1^k são conjuntamente Gaussianos, a estimativa de θ que minimiza o erro quadrático médio é <u>linear</u> nas observações. De facto, repare-se que (25) pode ser escrito como

$$E[\theta|Y_1^k] = f(E(\theta), E(Y_1^k)) + \sum_{i=1}^{k} W_i Y_i. \tag{28}$$

Quando θ e Y_1^k, não são conjuntamente Gaussianos então, de um **modo geral** $E[\theta|Y_1^k]$ é uma **função não linear** das observações .

Há ainda no entanto, para estes casos um resultado análogo ao Resultado 2.

Resultado 3: Admita-se que θ e Y_1^k não são conjuntamente Gaussianos, mas que se conhece $E[\theta]$, $E[Y_1^k]$, $R_{Y_1^k Y_1^k}$ e $R_{\theta Y_1^k}$. Então o **estimador linear** que minimiza o erro quadrático médio é ainda dado por

$$\hat{\theta}(k) = E[\theta] + R_{\theta Y_1^k} R_{Y_1^k}^{-1} [Y_1^k - E[Y_1^k]. \tag{29}$$

□

Repare-se que no Resultado 3 se faz uma minimização sujeita a uma restrição (estimador linear) enquanto que no Resultado 2 não há restrição. Se fosse retirada a restrição de estimador linear no resultado anterior, chegar-se-ia, de um modo geral, a um valor de $\hat{\theta}(k)$ função não linear das observações.

Propriedades de $\hat{\theta}(k)$ quando θ e Y_1^k são conjuntamente Gaussianos

Resultado 4: $\hat{\theta}(k)$ é uma estimativa centrada de θ

$$E[\hat{\theta}(k)] = E[\theta]. \tag{30}$$

□

Resultado 5: $\hat{\theta}(k)$ é um estimador de variância mínima.

□

Resultado 6: $\hat{\theta}(k)$ e $\tilde{\theta}(k)$ são conjuntamente Gaussianas.

□

As demonstrações dos três resultados anteriores podem ser encontradas em [2].

3 Filtro de Kalman Bucy

Neste capítulo resolve-se o problema da predição e da filtragem em estimação de estado. O problema foi formulado no Capítulo 1, tendo sido introduzida toda a notação. Por comodidade repete-se aqui a dinâmica,

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G w_k \quad & k \geq 0 \\ y_k = C_k x_k + v_k \end{cases}$$

$$E[v_k] = E[w_k] = 0 \tag{31}$$

$$\{v_k\}, \{w_k\} - \text{sequências brancas} \tag{32}$$

$$E\left[\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} (w_k^T v_k^T)\right] = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \tag{34}$$

$$E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = P_0 \tag{35}$$

Os problemas de filtragem e de predição a um passo são problemas de estimação de vectores de estado de um sistema estocástico. Por outras palavras estes são dois problemas de estimação de um vector de parâmetros aleatórios, pelo que se aplicam os resultados e o formalismo derivados na Secção 2.

Assim, é imediato que $\hat{x}(k|k)$ e $\hat{x}(k|k-1)$ se calculam como:

Filtragem

$$\hat{x}(k|k) = E[x(k)|Y_0^k, U_0^k] \tag{36}$$

Predição

$$\hat{x}(k|k-1) = E[x(k)|Y_0^{k-1}, U_0^{k-1}]. \tag{37}$$

3.1 Dinâmica do Filtro

Caso geral não gaussiano

No caso em que v_k, w_k e x_0 não são vectores Gaussianos, os passos de predição e filtragem obtém-se propagando as f.d.p. condicionais

$$p(x(k)|Y_0^k, U_0^k) \text{ e } p(x(k)|Y_0^{k-1}, U_0^{k-1})$$

e obtendo as estimativas como o valor médias dessas f.d.p..

Caso geral gaussiano

Quando v_k, w_k e x_0 são gaussianos, os vectores aleatórios x_k, x_{k+1}, Y_0^k são conjuntamente gaussianos. Designe-se, em notação reduzida,

$$p(x_k|Y_0^k, U_0^k) \quad \sim \quad \mathcal{N}(\hat{x}(k|k), P(k|k)) \tag{38}$$

$$p(x_{k+1}|Y_0^k, U_0^k) \quad \sim \quad \mathcal{N}(\hat{x}(k+1|k), P(k+1|k)) \tag{39}$$

em que $\hat{x}(k|k)$ e $\hat{x}(k|k-1)$ são dados por (36) e (37) e

$$\begin{aligned} P(k|k) &= E[(x_k - \hat{x}(k|k))(x_k - \hat{x}(k|k))^T|Y_0^k, U_0^k] && (40)\\ P(k+1|k) &= E[(x_{k+1} - \hat{x}(k+1|k)(x_{k+1} - \hat{x}(k+1|k))^T|Y_0^k, U_0^k]. && (41) \end{aligned}$$

O filtro de Kalman como veremos é um sistema linear, variante no tempo, cujo estado é uma estimativa do vector de estado de um sistema linear. Assim, no caso gaussiano, a dinâmica do filtro de Kalman propaga o valor médio da f.d.p. condicional de x_n dadas as observações passadas.

Associada à dinâmica do filtro (propagação de momentos de primeira ordem) deriva-se uma equação de Riccati que propaga a matriz de covariância da f.d.p. acima referida. O ganho do filtro é função do valor desta equação de Riccati.

Nos pontos seguintes deriva-se a dinâmica do filtro mostrando, em diversos passos, a propagação recursiva com o número de observações das f.d.p. condicionais $p(x_n \mid Z_n)$ e $p(x_{n+1} \mid Z_n)$. Essa derivação encontra-se esquematizada na figura 2.

$$\begin{tikzcd} p(x_n|Z_n) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\text{Predição}"'] & & p(x_{n+1}|Z_{n+1}) \\ & p(x_{n+1}|Z_n) \arrow[ur, "\text{Filtragem}"'] & \end{tikzcd}$$

Figure 2: Predição e Filtragem

Ponto de partida: admite-se conhecida a f.d.p. $p(x_k|Y_0^k, U_0^k)$, i.e., $\hat{x}(k|k)$ e $P(k|k)$.

Passo 1: <u>Cálculo de $p(x_{k+1}|Y_0^k, U_0^k)$</u> $\boxed{\text{PREDIÇÃO}}$

Esta f.d.p. como é Gaussiana fica completamente conhecida pela indicação da **média** e da matriz de **covariância**. A partir de (3) tem-se que

$$E[x_{k+1}|Y_0^k, U_0^k] = A_k E[x_k|Y_0^k, U_0^k] + B_k E[u_k|Y_0^k, U_0^k] + GE[w_k|Y_0^k, U_0^k] \tag{42}$$

ou ainda atendendo a (38), (39) e ao facto de w_k e Y_0^k serem independentes e w_k ter média nula, tem-se:

$$\hat{x}(k+1|k) = A_k \hat{x}(k|k) + B_k u_k. \tag{43}$$

Definindo o erro de predição como

$$\tilde{x}(k+1|k) \triangleq x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) \tag{44}$$

e substituindo nesta expressão os valores de $x(k+1)$ e $\hat{x}(k+1|k)$ obtém-se:

$$\tilde{x}(k+1|k) = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k - A_k \hat{x}(k|k) - B_k u_k = A_k \tilde{x}(k|k) + G_k w_k \tag{45}$$

em que se definiu o erro de filtragem de modo análogo a (44)

$$\tilde{x}(k|k) \triangleq x(k) - \hat{x}(k|k). \tag{46}$$

A partir de (45) tem-se que

$$E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}(k+1|k)^T|Y_0^k, U_0^k] = A_k E[\tilde{x}(k|k)|Y_0^k, U_0^k] A_k^T + G_k Q G_k^T \tag{47}$$

uma vez que $\tilde{x}(k|k)$ e w_k são independentes. Introduzindo em (47) a notação (40) e (41) tem-se:

$$P(k+1|k) = A_k P(k|k) A_k^T + G_k Q G_k^T. \tag{48}$$

Passo 2: <u>Cálculo de $p(y_{k+1}|Y_0^k, U_0^k)$</u>

Atendendo a (3),

$$p(y_{k+1}|Y_0^k, U_0^k) = p(C_{k+1}x_{k+1} + v_{k+1}|Y_0^k, U_0^k) \tag{49}$$

pelo que, atendendo ao carácter Gaussiano se tem

$$\hat{y}(k+1|k) = E[y_{k+1}|Y_0^k, U_0^k] = C_{k+1}\hat{x}_{k+1|k}. \tag{50}$$

Definindo o erro de predição na saída como

$$\tilde{y}(k+1|k) \triangleq y_{k+1} - \hat{y}(k+1|k), \tag{51}$$

e substituindo os valores de $y(k+1)$ e $\hat{y}(k+1|k)$ obtém-se:

$$\tilde{y}(k+1|k) = C_{k+1}\hat{x}(k+1|k) + v_{k+1} \tag{52}$$

pelo que a matriz de covariância associada a (49) é dada por

$$P_{\tilde{y}}(k+1|k) = C_{k+1} P(k+1|k) C_{k+1}^T + R. \tag{53}$$

multiplicando x_{k+1} à direita por $\tilde{y}(k+1|k)^T$ e usando (52) obtém-se:

$$x_{k+1}\tilde{y}^T(k+1|k) = x_{k+1}\tilde{x}(k+1|k)^T C_{k+1}^T + x_{k+1}v_{k+1}^T$$

pelo que

$$E[x_{k+1}\tilde{y}^T(k+1|k)] = P(k+1|k)C_{k+1}^T. \tag{54}$$

Passo 3: Cálculo de $p(x_{k+1}|Y_0^{k+1}, U_0^{k+1})$ $\boxed{\text{FILTRAGEM}}$

Para cálculo do valor médio condicional de x_{k+1} note que

$$Y_0^{k+1} \text{ e } \{Y_0^k, \tilde{y}(k+1|k)\}$$

são equivalentes do ponto de vista de informação contida. Deste modo,

$$E[x_{k+1}|Y_0^{k+1}, U_0^{k+1}] = E[x_{k+1}|Y_0^k, \tilde{y}(k+1|k), U_0^{k+1}]. \tag{55}$$

Por outro lado, Y_0^k e $\tilde{y}(k+1|k)$ são independentes (ver Corolário 1 no Capítulo 2) pelo que (veja Apendice 1)

$$\hat{x}(k+1|k+1) = E[x(k+1)|Y_0^k] + E[x_{k+1}, \tilde{y}^T(k+1|k)P_{\tilde{y}(k+1|k)}^{-1}\tilde{y}(k+1|k)$$

ou seja,

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + P(k+1|k)C_{k+1}^T[C_{k+1}P(k+1|k)C_{k+1}^T + R]^{-1}[y(k+1) - C_{k+1}\hat{x}_{(k+1|k)}] \tag{56}$$

Definindo agora o erro

$$\hat{x}(k+1|k+1) \triangleq x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1)$$

e substituindo aqui (56) obtém-se:

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = \tilde{x}(k+1|k) - P(k+1|k)C_{k+1}^T[C_{k+1}P_{k+1|k}C_{k+1}^T + R]^{-1}[C_{k+1}\tilde{x}(k+1|k) + v_{k+1}$$

pelo que

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - P(k+1|k)C_{k+1}^T[C_{k+1}P_{k+1|k}C_{k+1}^T + R]^{-1}C_{k+1}P(k+1|k). \tag{57}$$

Conclusão:

$\boxed{\text{Predição}}$:

$$\hat{x}(k+1|k) = A_k\hat{x}(k|k) + B_k u_k \tag{58}$$
$$P(k+1|k) = A_k P(k|k)A_k^T + G_k Q G_k^T \tag{59}$$

$\boxed{\text{Filtragem}}$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[y(k) - C_k\hat{x}_{k|k-1} \tag{60}$$
$$K(k) = P(k|k-1)C_k^T[C_kP(k|k-1)C_k^T + R]^{-1} \tag{61}$$
$$P(k|k) = [I - K(k)C_k]P(k|k-1) \tag{62}$$

Condições iniciais

$$\hat{x}(0|-1) = \bar{x}_0 \tag{63}$$

$$P(0|-1) = \Sigma_0 \tag{64}$$

□

Na Figura 3 apresenta-se o diagrama de blocos do Filtro de Kalman-Bucy.

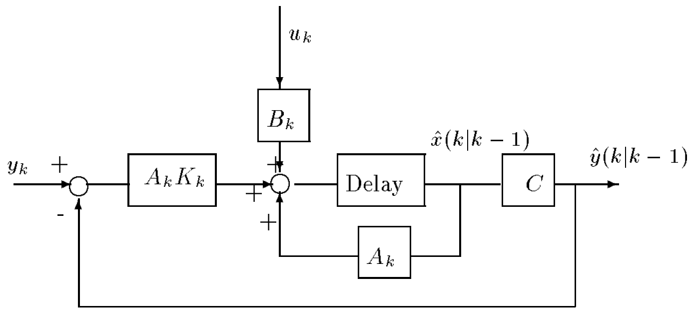

Figure 3: Diagrama de blocos do filtro de Kalman-Bucy

3.2 Dinâmica do filtro em termos da predição a um passo

Usando simultaneamente (58) a (54) obtém-se a dinâmica do filtro em termos da estimativa prevista do estado,

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) &= A_k\hat{x}(k|k-1) + B_k u_k + A_k K(k)[y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}] && (65)\\ \hat{x}(0|-1) &= \bar{x}_0 && (66) \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k|k-1)C_k^T[C_k P(k|k-1)C_k^T + R]^{-1} && (67)\\ P(k+1|k) &= A_k P(k|k-1)A_k^T - A(k)K(k)C_k P(k|k-1)A(k)^T + G_k Q G_k^T && (68)\\ P(0|-1) &= \Sigma_o && (69) \end{aligned}$$

A equação (65) ainda pode ser escrita de um outro modo por substituição do ganho $K(k)$ pelo seu valor dado por (67),

$$P(k+1|k) = A_k P(k|k-1)A_k^T + G_k Q G_k^T - A_k P(k|k-1)C_k^T[C_k P(k|k-1)C_k^T + R]^{-1} C_k P(k|k-1)A_k^T \tag{70}$$

ou ainda,

$$P(k+1|k) = A_k P(k|k-1)A_k^T + G_k Q G_k^T - A_k K(k)[C_k P(k|k-1)C_k^T + R]K^T(k)A_k^T. \tag{71}$$

3.3 Dinâmica do filtro para um sistema invariante no tempo

Admita-se agora que o sistema original é invariante no tempo, i.e. $A_k = A$, $B_k = B$, $G_k = G$, $C_k = C, \forall k \geq 0$

A dinâmica do filtro obtém-se particularizando as expressões anteriores, para esta situação, i.e.,

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k-1) + Bu_k + K(k)[y_k - C\hat{x}_{k|k-1}] \tag{72}$$

$$K(k) = P(k|k-1)C^T[CP(k|k-1)C^T + R]^{-1} \tag{73}$$

$$P(k+1|k) = AP(k|k-1)A^T + GQG^T - AK(k)[CP(k|k-1)C^T + R]K^T(k)A \tag{74}$$

Note-se que, embora o sistema cujo estado foi estimado seja invariante no tempo, o filtro de Kalman é um sistema linear variante no tempo, uma vez que, em (72), o ganho de Kalman é função de k.

Mediante condições, que detalharemos na sub-secção seguinte, o ganho converge para um valor em regime estacionário.

3.4 Equação de Riccati

A equação (74) é um equação de Riccati discreta. Veremos em que condições existe convergência de (74).

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n e G uma matriz $n \times m$. Diz-se que o par (A, G) é estabilizável se existir uma matriz K, $(n \times m)$, tal que os valores próprios de $A - GK$ estejam no interior da circunferência de raio unitário. Diz-se que (A, F) é detectável se (A^T, F^T) for estabilizável.

□

Como é evidente

$$(F, G) \text{ controlável} \Rightarrow (F, G) \text{ estabilizável.}$$

Teorema: Admita-se que $(A, (GQG^T)^{\frac{1}{2}}$ é estabilizável em que $(GQG^T)^{\frac{1}{2}}$ é uma raiz quadrada da matriz GQG^T e que (A, C) é detectável. Seja $\Sigma_0 \geq 0$. Então:

1. $\lim_{k\to\infty} P(k|k-1) = \bar{P} \geq o$

2. $\bar{P}$ é a única solução semi-definida positiva da equação de Riccati discreta

$$\bar{P} = A\bar{P}A^T - A\bar{P}C^T[C\bar{P}C^T + R]^{-1}C\bar{P}A^T + GQG^T, \tag{75}$$

que, consequentemente é independente de Σ_0. Se $(A, (GQG^T)^{\frac{1}{2}})$ for controlável, então $\bar{P} > 0$.

3. $A - \bar{K}C$ é uma matriz assimptoticamente estável, i.e. todos os seus valores próprios estão no interior da circunferência de raio unitário.

□

No ponto 3. do Teorema anterior, $\bar{K}$ é o ganho do filtro em regime estacionário. Para entender o significado desse ponto, reescreva-se (72) como

$$\hat{x}(k+1|k) = [A - K(k)C]\hat{x}(k|k-1) + Bu_k + K(k)y_k$$

ou ainda para a dinâmica do erro de predição

$$\tilde{x}(k+1|k) = [A - K(k)C]\tilde{x}(k|k-1) + G_k w_k - K(k)Cv_k$$

O valor médio do erro vem dado por

$$E[\tilde{x}(k+1|k)] = [A - K(k)C]E[\tilde{x}(k|k-1)] \tag{76}$$

pelo que, independentemente de o sistema original ser estável ou instável, o valor médio do erro é assimptoticamente estável.

3.5 Condições Iniciais

Neste ponto faremos breves comentários sobre as condições iniciais que considerámos no sistema e no filtro. Particularizemos este ponto para $u_k = 0$.

No sistema

Seja

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + Gw_k, k \geq 0 \\ y_k & = & Cx_k + v_k \end{array} \right. \tag{77}$$

em que

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \tag{78}$$

$$\Sigma_0 = E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] \tag{79}$$

e as sequências $\{v_k\}$ e $\{w_k\}$ têm as características estatísticas definidas na secção 1.

Aplicando o operador valor médio a ambos os membros de (77) vem

$$E[x_{k+1}] = AE[x_k]$$

que tem solução

$$E[x_k] = A^k \bar{x}_0 \tag{80}$$

Assim, se $\bar{x} \neq 0$, $\{x_k\}$ não poderá ser um processo estacionário. Considere-se então verificada a

Hipótese: $x_0 = 0$

Pela fórmula das constantes aplicada a (77) sabe-se que

$$x(l) = A^{l-k}x(k) + \sum_{j=k}^{l-1} A^{l-1-j}Gw_j. \tag{81}$$

Multiplicando (81) à direita por $x^T(k)$ e calculando valor médio obtém-se:

$$E[x(l)x^T(k)] = A^{l-k}E[x(k)x(k)^T], l \geq k.$$

Deste modo, para que o processo seja estacionário $E[x(l)x^T(k)]$ deve ser independente de k. Calculando $E[x(k)x(k)^T]$ para valores crescentes de k vem:

$$\begin{aligned} E[x(0)x(0)^T] &= \Sigma_0 && (82)\\ E[x(1)x(1)^T] &= E[(Ax(0)+Gw(0))(x^T(0)A^T+w^T(0)G^T)] = A\Sigma_0A^T + GQG^T && (83)\\ E[x(2)x(2)^T] &= AE[(x(1)x(1)^T]A^T + GQG^T = A^2\Sigma_0A^{2^T} + AGQG^TA^T + GQG^T && (84)\end{aligned}$$

de onde se conclui

$$E[x(k)x(k)^T] = AE[(x(k-1)x(k-1)^T]A^T + GQG^T. \tag{85}$$

Deste modo, o processo $\{x_k\}$ é estacionário sse

$$\Sigma_0 = A\Sigma_0A^T + GQG^T.$$

Note-se que esta condição de estacionariedade não é necessária para a aplicação do filtro.

No filtro

As condições iniciais consideradas no filtro, dadas por exemplo em termos da predição a um passo, são as seguintes,

$$\begin{aligned} \hat{x}(0 \mid -1) &= \bar{x}_0 && (86)\\ P(0 \mid -1) &= \Sigma_0, && (87)\end{aligned}$$

o que traduz que a primeira estimativa prevista do estado tem a mesma caracterização probabilística que o estado inicial do sistema.

As condições anteriores têm uma explicação intuitiva. Na ausência de observações do sistema (i.e., formalmente no instante $k=-1$), o *melhor* que se pode fazer na predição do estado no instante 0 é dizer que essa predição coincide com o valor médio do vector aleatório que é estado inicial do sistema.

Como veremos mais à frente, a escolha de (86) e (87) conduz a estimativas centradas do estado ara todos os intantes do tempo. Quando os valores de $\bar{x}_0$ e Σ_0 não são conhecidos a priori, a inicialização do filtro não pode reflectir as condições iniciais do sistema. Uma escolha possível é

$$\begin{aligned} \hat{x}(0 \mid -1) &= 0 && (88)\\ P(0 \mid -1) &= P_0 = \alpha I. && (89)\end{aligned}$$

Ver-se-à mais à frente que, nas condições em que existe convergência da equação de Riccati associada ao filtro de Kalman, o valor médio do erro de estimação converge para zero.

3.6 Processo de inovações

Chama-se **inovação** a

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) \tag{90}$$

i.e., a componente de y no instante k que não pode ser prevista no instante $k-1$. Este processo tem algumas características importantes como em seguida se indica:

Propriedade 1: O processo de inovação tem média nula.
Demonstração:

$$E[e(k)] = E[y(k) - \hat{y}(k|k-1)] = E[Cx(k) + v(k) - C\hat{x}(k|k-1)] = CE[\tilde{x}(k|k-1)]$$

uma vez que, por hipótese, $\{v_k\}$ te média nula. Para um sistema invariante no tempo, a dinâmica do erro de predição é dada por (ver(76))

$$E[\tilde{x}(k+1|k)] = [A - K(k)C]E[\tilde{x}(k|k-1)] \tag{91}$$

ou seja é uma dinámica homogénea. A mesma conclusão se tira para um sistema variante no tempo. Para $k=0$, $E[\tilde{x}(0|-1)] = 0$ uma vez que

$$E[\tilde{x}(0|-1)] = E[x_0] - \hat{x}(0|-1)$$

e se escolheu $\hat{x}(0|-1) = \vec{x}_0$ (ver 63). Deste modo, o valor médio do erro de predição é nulo, e consequentemente o processo de inovação tem média nula.

$\square$

A demonstração da propriedade anterior suscita um comentário relativo às condições iniciais que se impõem ao filtro de Kalman. De acordo com (91) a dinâmica do erro de predição é homogénea, pelo que a um erro inicial nulo corresponde um erro sempre nulo. Se $\hat{x}_{0|-1} \neq \bar{x}_0$ o erro inicial não é nulo. No entanto, nas condições (já vistas antes) em que existe solução da equação de Riccati discreta em regime estacionário, o erro tende, assimptoticamente para zero.

$\square$

Propriedade 2: O processo de inovação é branco
Demonstração: Vamos admitir nesta demonstração que $\hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0$, pelo que $E[e(k)] = 0$, i.e., o processo de inovações tem média nula. Pretendemos então mostrar que

$$E[e(k)e^T(j)] = 0$$

para $k \neq j$.

Por uma questão de simplicidade vamos apenas considerar a situação em que $j = k+1$, o que não esgotando a demonstração é o seu primeiro passo. Pela definição de processo de inovações, tem-se:

$$e(k) = C\tilde{x}(k|k-1) + v_k$$

pelo que

$$\begin{aligned} E[e(k)e^T(k+1)] &= CE[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{x}(k+1|k)]C^T + CE[\tilde{x}(k|k-1)v_{k+1}^T] \\ &\quad + E[v_k\tilde{x}^T(k+1|k)]C^T + E[v_k v_{k+1}^T] \end{aligned} \tag{92}$$

Pelo facto de $\{v_k\}$ ter média nula e ser um processo branco, é imediato que a segunda e a quarta parcelas de (92) são nulas.

Convida-se o leitor a substituir (58) e (60) na igualdade anterior e a concluir a demonstração.

Propriedade 3:

$$E[e(k)e^T(k)] = CP(k|k-1)C^T + R$$

□

Propriedade 4:

$$\lim_{k\to\infty} E[e(k)e^T(k)] = C\vec{P}C^T + R$$

□

3.7 Representação de Inovações

A dinâmica de estado que concluimos para o filtro de Kalman é a seguinte:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k-1) + Bu_k + AK(k)[y(k) - C\hat{x}(k|k-1)] \\ \hat{y}(k|k-1) = C\hat{x}(k|k-1) \end{cases}$$

em que $A = A(\theta)$, $B = B(\theta)$, $K(k) = K(k,\theta)$, $C = C(\theta)$ e θ é o vector de parâmetros do modelo.

Associando a esta representação, numa relação de 1 para 1, é vulgar trabalhar-se com a representação de inovações

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k-1) + Bu_k + AK(k)e(k) \\ y(k) = C\hat{x}(k|k-1) + e(k) \end{cases}$$

Relembre-se que o modelo com o qual começámos esta análise é o seguinte:

4 Extended Kalman Filter

Considere-se o sistema dinâmico não linear dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f_k(x_k) + w_k && (93) \\ z_k &= h_k(x_k) + v_k && (94) \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{array}{lcll} x_k & \in & \mathcal{R}^l, & f_k(x_k) : \mathcal{R}^l, \longrightarrow \mathcal{R}^l \\ z_k & \in & \mathcal{R}^k & h_k(x_k) : \mathcal{R}^l \longrightarrow \mathcal{R}^k \\ v_k & \in & \mathcal{R}^k & \\ w_k & \in & \mathcal{R}^p & \end{array} \qquad (95)$$

e $\{v_k\}, \{w_k\}$ são processos gaussianos, de média nula, e matriz de covariância

$$\begin{aligned} E[v_k v_k^T] &= R_k && (96) \\ E[w_k e_k^T] &= Q_k && (97) \end{aligned}$$

e x_0 é o estado inicial do sistema considerado como uma variável aleatória gaussiana

$$x_0 \sim N(\overline{x}_0, P_0).$$

Seja $Z_n = \{z_n, z_{n-1}, \ldots, z_0\}$ um conjunto de observações do sistema. A partir delas pretende-se determinar uma estimativa do vector de estado, $\hat{x}(n \mid n)$. Como se viu na secção 1, a estimativa que minimiza o erro quadrático médio é a média condicional de x_n dado Z_n. Excepto em casos particulares, o cálculo da média exige o conhecimento da f.d.p. condicional. Um desses casos particulares, já tratado na Secção 3, considera que a dinâmica do sistema é linear, com estado inicial e ruídos gaussianos, e como tal as f.d.p. $p(x(k) \mid Y_0^k)$, $p(x(k+1) \mid Y_0^k)$ e $p(x(k+1) \mid Y_0^{k+1})$ são gaussianas.

Com a dinâmica não linear (93)-(94), as referidas f.d.p. não são gaussianas, pelo que, para o cálculo do valor médio das variáveis aleatórias a que dizem respeito, é necessário propagar as funções densidade de probabilidade. No caso geral o esforço computacional envolvido é muito grande, pelo que apresentaremos uma técnica de filtragem sub-óptima conhecida como Filtro de Kalman Extendido (Extended Kalman Filter (EKF) na literatura anglo saxónica).

Neste filtro considera-se uma linearização da dinâmica não linear (93)-(94) feita em torno de sucessivas estimativas previstas e filtradas. Por outras palavras, o sistema não linear (93)-(94) é aproximada or sucessivos sistemas lineares. Esta aproximação permite, tal como no caso linear, estabelecer uma recursão nas f.d.p.

Assim, pretende-se determinar a recorrência

$$p(x_n \mid Z_n) \longrightarrow p(x_{n+1}) \mid Z_{n+1}).$$

Seja $p(x_n \mid Z_n)$ numa f.d.p. gaussiana com média η_F^n [1] e matriz de covariância V_F^n, i.e.,

$$p(x_n \mid Z_n) \sim \mathcal{N}(x_n - \eta_F^n, V_F^n).$$

Predição

Atendendo à dinâmica de estado,

$$x_{n+1} = f_n(x_n) + w_n, \tag{98}$$

e à Lei de Bayes, a f.d.p. condicional escreve-se como

$$p(x_{n+1} \mid Z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+1} \mid x_n) p(x_n \mid Z_n) dx_n, \tag{99}$$

ou ainda,

$$p(x_{n+1} \mid Z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{w_n}(x_{n+1} - f_n(x_n)) p(x_n \mid Z_n) dx_n \tag{100}$$

$$p_{w_n}(x_{n+1} - f_n(x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{l/2}[detQ_n]^{1/2}} exp[-\frac{1}{2}(x_{n+1} - f_n(x_n)^T Q_n^{-1}(x_{n+1} - f_n(x_n))]. \tag{101}$$

A expressão anterior não é uma função densidade de probabilidade gaussiana dada a não linearidade em x_n. Vamos então linealizar $f_n(x_n)$ em (98) em torno de $\eta_F^n = \hat{x}(n \mid n)$

[1] F - diz respeito a filtered

desprezando termos de ordem superior,

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &\cong f_n(\eta_F^n) + \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot [x_n - \eta_F^n] \\ &= \overbrace{f_n(\eta_F^n) - \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot \eta_F^n}^{u_n} + \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot x_n. \end{aligned} \tag{102}$$

Com a linearização, a dinâmica do sistema pode ser traduzida por:

$$x_{n+1} = \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot x_n + w_n + \underbrace{[f_n(\eta_F^n) - \nabla f_n \mid \eta_F^n \cdot \eta_F^n]}_{u_n} \tag{103}$$

ou seja,

$$\boxed{x_{n+1} = \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot x_n + w_n + u_n} \tag{104}$$

De acordo com (102) a expressão (100) escreve-se como:

$$\begin{aligned} p(x_{n+1} \mid Z_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{w_n}(x_{n+1} - \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot x_n - u_n) \cdot p(x_n \mid Z_n) dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x_{n+1} - \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot x_n - u_n, Q_n) \cdot \mathcal{N}(x_n - \eta_F^n, V_F^n) dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x_{n+1} - u_n - \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot x_n, Q_n) \mathcal{N}(x_n - \eta_F^n, V_F^n) dx_n \end{aligned} \tag{105}$$

Para simplificar o cálculo da expressão anterior, considere-se a seguinte transformação de variáveis [2]

$$y_n = \nabla f_n \cdot x_n. \tag{106}$$

Pela definição de média e de matriz de covariância de um vector aleatório, tem-se:

$$E[y_n] = \nabla f_n \cdot E[x_n] = \nabla f_n \cdot \eta_F^n \tag{107}$$

$$E[y_n y_n^T] = \nabla f_n \cdot V_F^n \cdot \nabla f_n^T. \tag{108}$$

Usando o resultado anterior a f.d.p. de x_n é sucessivamente escrita como:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(x_n - \eta_F^n, V_F^n) = \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(det V_F^n)^{1/2}} exp[-\frac{1}{2}(x_n - \eta_F^n)^T (V_F^n)^{-1}(x_n - \eta_F^n)] = \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(det V_F^n)^{1/2}} exp[-\frac{1}{2}(\nabla f_n x_n - \nabla f_n \cdot \eta_F^n)^T (\nabla f_F^n)^{-T} (V_F^n)^{-1} (\nabla f_F^n)^{-1} (\nabla f_n x_n - \nabla f_n \eta_F^n)] = \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(det V_F^n)^{1/2}} exp[-\frac{1}{2}(\nabla f_n x_n - \nabla f_n \eta_F^n)^T (\nabla f_n \cdot V_F^n \nabla f_n^T)^{-1} (\nabla f_n x_n - \nabla f_n \eta_F^n)] = \\ &\quad = det \nabla f_n \cdot \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(det \nabla f_n V_F^n \nabla f_n^T)^{1/2}} \\ &\quad exp[-\frac{1}{2}(\nabla f_n x_n - \nabla f_n \eta_F^n)^T (\nabla f_n V_F^n \nabla f_n^T)^{-1} (\nabla f_n x_n - \nabla f_n \eta_F^n)]. \end{aligned}$$

[2] A partir daqui usaremos por simplicidade a notação ∇f_n para representar $\nabla f_n \mid_{\eta_F^n}$

Conclui-se assim que

$$\mathcal{N}(x_n - \eta_F^n, V_F^n) = det \bigtriangledown f_n \cdot \mathcal{N}(\bigtriangledown f_n x_n - \bigtriangledown f_n \eta_F^n, \bigtriangledown f_n V_F^n \bigtriangledown f_n^T). \tag{109}$$

Substituindo (109) em (105) vem:

$$p(x_{n+1} \mid Z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x_{n+1} - u_n - \bigtriangledown f_n x_n, Q_n)\mathcal{N}(\bigtriangledown f_n x_n - \bigtriangledown f_n \eta_F^n, \bigtriangledown f_n V_F^n \bigtriangledown f_n^T) d(\bigtriangledown f_n \cdot x_n) \tag{110}$$

$$= \mathcal{N}(x_{n+1} - u_n, Q_n) \star \mathcal{N}(x_{n+1} - \bigtriangledown f_n \cdot \eta_F^n, \bigtriangledown f_n V_F^n \bigtriangledown f_n^T) \tag{111}$$

em que $\star$ designa a convolução das duas funções. Deste modo tem-se,

$$\boxed{p(x_{n+1} \mid Z_n) = \mathcal{N}(x_{n+1} - \bigtriangledown f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot \eta_F^n - u_n, Q_n + \bigtriangledown f_n \mid_{\eta_F^n} V_F^n \bigtriangledown f_n \mid_{\eta_F^n}^T} \tag{112}$$

Conclui-se deste modo que sendo,

$p(x_n \mid Z_n)$ gaussiana com média η_F^n
matriz conv. V_F^n

a linearização da dinâmica em torno de η_F^n conduz a

$p(x_{n+1} \mid Z_n)$ gaussiana com média η_P^{n+1}
matriz conv. V_P^{n+1}

em que

$$\eta_P^{n+1} = \bigtriangledown f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot \eta_F^n + f_n(\eta_F^n) - \bigtriangledown f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot \eta_F^n \tag{113}$$

ou ainda, atendendo ao valor de u_n dado por (103), vem finalmente,

$$\eta_P^{n+1} = f_n(\eta_F^n) \tag{114}$$

$$V_P^{n+1} = Q_n + \bigtriangledown f_n \mid_{\eta_F^n} \cdot V_F^n \cdot \bigtriangledown f_n^T \mid_{\eta_F^n} . \tag{115}$$

Filtragem

No passo de filtragem usa-se a observação do sistema no instante $n+1$ para actualizar a f.d.p. $p(x_{n+1} \mid Z_n)$ como se indica em seguida,

$$p(x_{n+1} \mid Z_n) \xrightarrow{z_{n+1}} .p(x_{n+1} \mid Z_{n+1})$$

De acordo com a lei de Bayes tem-se que,

$$p(x_{n+1} \mid Z_{n+1}) = \frac{p(Z_n)}{p(Z_{n+1})} \cdot [p(z_{n+1} \mid x_{n+1}) \cdot p(x_{n+1} \mid Z_n)]. \tag{116}$$

Para calcular a expressão anterior, note-se que, uma vez que,

$$z_{n+1} = h_{n+1}(x_{n+1}) + v_{n+1}, \tag{117}$$

a f.d.p. de z_{n+1} condicionada no estado x_{n+1} é dada por

$$p(z_{n+1} \mid x_{n+1}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}(detR_{n+1})^{1/2}} exp[-\frac{1}{2}(z_{n+1} - h_{n+1}(x_{n+1}))^T R_{n+1}^{-1}(z_{n+1} - h_{n+1}(x_{n+1}))]. \tag{118}$$

Com argumento análogo ao usado no passo de predição, a f.d.p. anterior vai ser simplificada através da linearização da dinâmica não linear de observação. Linearizando $h_{n+1}(x_{n+1})$ em torno de η_P^{n+1} e desprezando termos de ordem superior à primeira, obtém-se

$$h_{n+1}(x_{n+1}) \simeq h_{n+1}(\eta_P^{n+1}) + \bigtriangledown h \mid_{\eta_P^{n+1}} (x_{n+1} - \eta_P^{n+1}), \tag{119}$$

pelo que a equação de saída do sistema, pode ser aproximadamente representada por:

$$z_{n+1} = \bigtriangledown h \mid_{\eta_P^{n+1}} \cdot x_{n+1} + v_{n+1} + y_{n+1} \tag{120}$$

com

$$y_{n+1} = h_{n+1}(\eta_P^{n+1}) - \bigtriangledown h \mid_{\eta_P^{n+1}} \cdot \eta_P^{n+1}. \tag{121}$$

Tendo efectuado uma linearização em torno da estimativa de predição - que corresponde à estimativa prevista $\eta_P^{n+1} = \hat{x}_{n+1/n}$ - a dinâmica de saída pode ser considerada linear, sendo imediato o cálculo de $p(z_{n+1} \mid x_{n+1})$.
Deste modo, tem-se

$$p(z_{n+1} \mid x_{n+1}) = \mathcal{N}(z_{n+1} - y_{n+1} - \bigtriangledown h_{n+1} \mid_{\eta_P^{n+1}} \cdot x_{n+1}, R_{n+1}). \tag{122}$$

A expressão (122) pode ainda escrever-se como:

$$p(z_{n+1} \mid x_{n+1}) = \mathcal{N}(\bigtriangledown h_{n+1} \mid_{\eta_P^{n+1}} \cdot x_{n+1} + y_{n+1} - z_{n+1}, R_{n+1}). \tag{123}$$

Usando uma transformação de coordenadas idêntica à do passo de predição, a f.d.p. anterior é reescrita como

$$p(x_{n+1} \mid Z_n) = det \bigtriangledown h \mid_{\eta_P^{n+1}} \mathcal{N}(\bigtriangledown h_{n+1} \mid_{\eta_P^{n+1}} \cdot x_{n+1} - \bigtriangledown h_{n+1} \mid_{\eta_P^{n+1}} \cdot \eta_P^{n+1}, \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T) \tag{124}$$

Fazendo o produto das duas expressões (123) e (124) em (115) obtém-se:

$$\mathcal{N}(\bigtriangledown h_{n+1} \mid_{\eta_P^{n+1}} \cdot x_{n+1} - \mu, V) \tag{125}$$

em que a média e a matriz de covariância são dadas por:

$$\begin{aligned} \mu &= \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} [-y_{n+1} + z_{n+1}] \\ &+ R_{n+1} (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} \bigtriangledown h_{n+1} \cdot \eta_P^{n+1}, \qquad (126) \\ V &= \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} R_{n+1}. \qquad (127) \end{aligned}$$

Substituindo em (126) a expressão (121) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mu &= \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_T^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} \qquad (128) \\ & [-h_{n+1}(\eta_P^{n+1}) + \bigtriangledown h_{n+1} \cdot \eta_P^{n+1} + z_{n+1}] \\ & + R_{n+1} (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} \bigtriangledown h_{n+1} \eta_P^{n+1} \\ &= \bigtriangledown h_{n+1} \eta_P^{n+1} + \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} [z_{n+1} - h_{n+1}(\eta_P^{n+1})] \qquad (129) \\ V &= \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} R_{n+1} \qquad (130) \end{aligned}$$

em que $\bigtriangledown h_{n+1}$ é a notação short de $\bigtriangledown h_{n+1} \mid_{\eta_P^{n+1}}$.

Repare-se que (125) dá conta da f.d.p. de $\bigtriangledown h_{n+1} \mid_{\eta_P^{n+1}} \cdot x_{n+1}$ e não de x_{n+1} como se pretendia. De facto, o objectivo é encontrar

$$\mathcal{N}(x_{n+1} - \mu_1, V_1). \tag{131}$$

Repare-se que (125) se pode obter a partir de (131). Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x_{n+1} - \mu_1, V_1) &= det \bigtriangledown h_{n+1} \cdot \mathcal{N}(\bigtriangledown h_{n+1} x_{n+1} - \bigtriangledown h_{n+1}\mu_1, \bigtriangledown h_{n+1} V_1 \bigtriangledown h_{n+1}^T) & (132)\\ &= det \bigtriangledown h_{n+1} \mathcal{N}(\bigtriangledown h_{n+1} x_{n+1} - \mu, V), & (133)\\ & & (134) \end{aligned}$$

em que μ e V são dados por (126) e (127).

Comparando (133) com (132) vem:

$$\begin{aligned} \bigtriangledown h_{n+1}\mu_1 &= \bigtriangledown h_{n+1}\eta_P^{n+1} + \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1}[z_{n+1} - h_{n+1}(\eta_P^{n+1})] & (135)\\ \mu_1 &= \eta_P^{n+1} + V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1}[z_{n+1} - h_{n+1}(\eta_P^{n+1})]. & (136) \end{aligned}$$

Conclui-se assim que:

$$\boxed{\eta_F^{n+1} = \eta_P^{n+1} + V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1}[z_{n+1} - h_{n+1}(\eta_P^{n+1})]} \tag{137}$$

em que se relembra que se tomou

$$\bigtriangledown h_{n+1} = \bigtriangledown h_{n+1} \mid_{\eta_P^{n+1}} .$$

Comparando (133) e (132) em termos das matrizes de covariância, obtém-se:

$$V = \bigtriangledown h_{n+1} V_1 \bigtriangledown h_{n+1}^T. \tag{138}$$

Substituindo nesta expressão V pelo valor dado por (130) obtém-se,

$$\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} R_{n+1} = \bigtriangledown h_{n+1} V_F^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T \tag{139}$$

que se pretende resolver em ordem a V_F^{n+1}. A partir das igualdades anteriores, vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T &= \bigtriangledown h_{n+1} V_F^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} (\bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + R_{n+1}) & (140)\\ &= \bigtriangledown h_{n+1} V_F^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T + \bigtriangledown h_{n+1} V_F^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T & (141)\\ & & (142) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} V_P^{n+1} &= V_F^{n+1} \bigtriangledown h_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1} + V_F^{n+1} & (143)\\ V_P^{n+1} &= V_F^{n+1}[I + \bigtriangledown h_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1}] & (144)\\ V_F^{n+1} &= V_P^{n+1}[I + \bigtriangledown h_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} \bigtriangledown h_{n+1} V_P^{n+1}]^{-1}. & (145) \end{aligned}$$

Usando o lema de inversão de matrizes, vem

$$\begin{aligned} V_F^{n+1} &= V_P^{n+1}[I - \nabla h_{n+1}^T R_{n+1}^{-1}(I + \nabla h_{n+1} V_P^{n+1} \nabla h_{n+1}^T R_{n+1}^{-1})^{-1} \nabla h_{n+1} V_P^{n+1}] && (146)\\ &= V_P^{n+1}[I - \nabla h_{n+1}^T [R_{n+1} + \nabla h_{n+1} V_P^{n+1} \nabla h_{n+1}^T]^{-1} \nabla h_{n+1} V_P^{n+1}] && (147)\\ & && (148) \end{aligned}$$

$$\boxed{V_F^{n+1} = V_P^{n+1} - V_P^{n+1} \nabla h_{n+1}^T [R_{n+1} + \nabla h_{n+1} V_P^{n+1} \nabla h_{n+1}^T]^{-1} \nabla h_{n+1} V_P^{n+1}} \qquad (149)$$

Conclui-se assim que considerando que $p(x_{n+1} \mid Z_n)$ é uma função gaussiana, tendo acesso à observação z_{n+1} e linearizando a equação de observação do sistema em torno de η_P^{n+1} se obtém uma f.d.p. $p(x_{n+1} \mid Z_{n+1})$ gaussiana com média e matriz de covariância η_F^{n+1} e V_F^{n+1} dados respectivamente por (137) e (149).

Em seguida sumarizam-se os resultados anteriores e interpreta-se o filtro de Kalman Extendido como um filtro de Kalman aplicado a uma dinâmica linear variante no tempo.

CONCLUSÕES

Seja:

$$\eta_P^{n+1} = \hat{x}(n+1/n) \qquad (150)$$

$$V_P^{n+1} = \Sigma(n+1/n) \qquad (151)$$

$$\eta_F^{n+1} = \hat{x}(n+1/n+1) \qquad (152)$$

$$V_F^{n+1} = \Sigma(n+1/n+1) \qquad (153)$$

e considere-se

$$\begin{aligned} \nabla f_n \mid_{\eta_F^n} &= \nabla f_n \mid_{\hat{x}(n/n)} = F(n) && (154)\\ \nabla h_{n+1} \mid_{\eta_P^n+1} &= \nabla h \mid_{\hat{x}(n+1/n)} = H(n+1) && (155)\\ u(n) &= f_n(\hat{x}(n/n)) - F(n) \cdot \hat{x}(n/n) && (156)\\ y(n+1) &= h_{n+1}(\hat{x}(n+1/n)) - H(n+1) \cdot \hat{x}(n+1/n). && (157) \end{aligned}$$

Considere-se agora um sistema linear em cuja dinâmica intervêm as grandezas acabadas de definir,

$$\begin{aligned} x(n+1) &= F(n)x(n) + w_n + u_n && (158)\\ z(n+1) &= H(n+1)x(n+1) + v_{n+1} + y(n+1) && (159) \end{aligned}$$

O filtro de Kalman-Bucy que estima o estado do sistema linear variante no tempo (158)-(159) tem dinâmica,

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+1/n) &= f_n(\hat{x}(n/n) && (160)\\ \hat{x}(n+1/n+1) &= \hat{x}(n+1/n) + K(n+1)[z_{n+1} - h_{n+1}(\hat{x}(n+1/n))] && (161) \end{aligned}$$

em que $K(n+1)$ é o ganho do filtro e se tem

$$
\begin{aligned}
K(n+1) &= \Sigma(n+1/n)H^T(n+1)[H(n+1)\Sigma(n+1/n)H^T(n+1)+R(n+1)]^{-1} && (162)\\
\Sigma(n+1/n) &= F(n)\Sigma(n/n)F^T(n)+Q(n) && (163)\\
\Sigma(n+1/n+1) &= \Sigma(n+1/n)-\Sigma(n+1/n)H^T(n+1) && (164)\\
& \quad [H(n++1)\Sigma(n+1/n)H^T(n+1)+R(n+1)]^{-1}H(n+1)\Sigma(n+1/n) && (165)
\end{aligned}
$$

A expressão (165) pode ainda ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(n+1/n+1) &= \Sigma(n+1/n)\times && (166)\\
& \quad \times[I-\Sigma(n+1/n)H^T(n+1)[H(n+1)+\Sigma(n+1/N)H^T(n+1)+R_{n+1}]^{-1}H(n+1)] && (167)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Sigma(n+1/n+1)=\Sigma(n+1/n)[I-K(n+1)H(n+1)]} \tag{168}$$

5 Apêndice

Alguns resultados importantes sobre variáveis aleatórias gaussianas

Neste apêndice apresentam-se, sem demonstração, alguns resultados importantes sobre variáveis e vectores aleatórios gaussianos. Ao leitor interessado nas provas sugere-se consulta atenta de [5]. É vasta a bibliografia alternativa sobre este assunto. Aconselha-se a lição 12 de [2] ou, para consulta mais aprofundada, [3].

Variável Gaussiana

Diz-se que uma variável aleatória x é normal ou gaussiana com média m_x e variaância σ_x^2 sse a sua função densidade de probabilidade for dada por

$$p_x(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp[-1/2(X-m_x)^2/\sigma_x^2] \tag{169}$$

o que é normalmente representado por

$$x \sim \mathcal{N}(x-m_x,\sigma_x^2)$$

ou ainda

$$x \sim \mathcal{N}(m_x,\sigma_x^2). \tag{170}$$

Vector Gaussiano

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m$ variáveis aleatórias e designe-se por

$$x=[x_1\ x_2\ \ldots x_m]^T. \tag{171}$$

A função densidade de probabilidade

$$
\begin{aligned}
p_x(X) &= p(X_1,X_2,\ldots,X_m) && (172)\\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m det P_x}}\exp[-1/2(X-m_x)^T P_x^{-1}(X-m_x)] && (173)
\end{aligned}
$$

diz-se a f.d.p. do vector gaussiano x. Em (173),

$$\begin{aligned} m_x &= E[x] && (174)\\ P_x &= E[(x-m_x)(x-m_x)^T] && (175)\end{aligned}$$

são, respectivamente, a média e a matriz de covariância do vector aleatório x.

Vectores conjuntamente Gaussianos

Sejam $x \in R^n$ e $y \in R^m$ dois vectores gaussianos, i.e.,

$$x \sim \mathcal{N}(m_x, P_x), \qquad y \sim \mathcal{N}(m_y, P_y).$$

Seja P_{xy} a matriz de covariância cruzada de x e y, dada por

$$P_{xy} = E[(x-m_x)(x-m_x)^T]. \tag{176}$$

É imediato de (176) que

$$P_{yx} = E[(y-m_y)(x-m_x)^T] = P_{xy}^T.$$

Os vectores x e y são conjuntamente gaussianos se

$$p(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n+m} det P_z}} \exp[-1/2(Z-m_z)^T P_z^{-1}(Z-m_z)] \tag{177}$$

em que,

$$\begin{aligned} z &= [x \mid y]^T && (178)\\ m_z &= [m_x \mid m_z]^T && (179)\end{aligned}$$

e

$$P_z = \begin{bmatrix} P_x & P_{xy} \\ P_{yx} & P_y \end{bmatrix}. \tag{180}$$

Note-se que se x e y forem conjuntamente gaussianos, então são marginalmente gaussianos, i.e.,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(X,Y)dY &= \mathcal{N}(m_x, P_x) && (181)\\ \int_{-\infty}^{\infty} p(X,Y)dX &= \mathcal{N}(m_y, P_y). && (182)\end{aligned}$$

O inverso da afirmação anterior é verdadeiro se x e y forem independentes, mas não é necessariamente verdadeiro se x e y não forem indepedentes.

Função densidade de probabilidade condicional

Sejam x e y vectores conjuntamente gaussianos de dimensões n e m respectivamente.

Resultado 1: A f.d.p. condicional dos vectores x e y acima considerados é dada por

$$p(X \mid Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det P}} \exp[-1/2(X-m)^T P^{-1}(X-m)] \tag{183}$$

em que,

$$
\begin{aligned}
m &= E[x \mid y] = m_x + P_{xy}P_y^{-1}(y - m_y) && (184)\\
P &= P_x - P_{xy}P_y^{-1}P_{yx}. && (185)
\end{aligned}
$$

□

Para a demonstração do resultado anterior veja [2].

O resultado anterior mostra que sendo x e y conjuntamente gaussianos, então $p(x \mid y)$ é ainda gaussiana com média (184) e matriz de covariância (185).

Propriedades da média condicional

Do resultado anterior em que x e y são conjuntamente gaussianas conclui-se que

$$E[x \mid y] = m_x + P_{xy}P_y^{-1}(y - m_y). \tag{186}$$

Uma vez que $E[x \mid y]$ depende de y que é uma variável aleatória, a média condicional é também uma variável aleatória que se caracteriza em seguida.

Resultado 2: Sendo x e y vectores conjuntamente gaussianos, $E[x \mid y]$ é ainda um vector gaussiano, representando uma transformação afim de y.

□

Resultado 3: Sejam $x \in R^n$, $y \in R^m$ e $z \in R^r$ vectores conjuntamente gaussianos. Se y e z forem estatisticamente independentes, então:

$$E[x \mid y, z] = E[x \mid y] + E[x \mid z] - m_x.$$

□

Resultado 4: Sejam $x \in R^n$, $y \in R^m$ e $z \in R^r$ vectores conjuntamente gaussianos. Se y e z não forem necessariamente independentes, então:

$$E[x \mid y, z] = E[x \mid y, \tilde{z}]$$

em que,

$$\tilde{z} = z - E[z \mid y]$$

o que conduz a

$$E[x \mid y, z] = E[x \mid y] + E[x \mid \tilde{z}] - m_x.$$

□

References

[1] T. Kailath, "Lectures Notes on Wiener and Kalman Filtering," Springer-Verlag, 1981.

[2] J. Mendel, "Lessons in Digital Estimation Theory", Prentice-Hall, 1987.

[3] K. S. Miller, "Multidimensional Gaussian Distributions," John Wiley & Sons, 1963.

[4] J. M. F. Moura, "Linear and Nonlinear Stochastic Filtering," NATO Advanced Study Institute, Les Houches, September 1985.

[5] A. Papoulis, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes," McGraw-Hill, 1965.

[6] H. L. Van Trees, "Detection, Estimation and Modulation Theory," John Wiley & Sons, 1968.